

A fa hordó - téma folytatása

Már az első hordós dolgozatunk készítése során találkoztunk az [1] írással. Ebben egy óriási fa boroshordó felmérésével, illetve számításával foglalkozik a fizikus szerző. Most az itt olvasottakat dolgozzuk fel: megkíséreljük azt megérteni és értelmezni. Ehhez tekintsük az 1. ábrát is!



1. ábra – forrás:

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bd/Gr%C3%B6ninger_Fass.jpg

Itt a tölgyfából készült, fekvő helyzetű *groningeni óriáshordó*t látjuk, melyet fém szalagokkal erősítettek meg. A hordó megtámasztása a 2. ábrán szemlélhető.



2. ábra

forrás: <http://www.schmanck.de/fass1.htm>



3. ábra

forrás: <http://www.schmanck.de/fass2.htm>

A 3. ábrán a hordót belülről vehetjük szemügyre. Látjuk a hosszirányú dongákat, a kör tengelyvonalú merevítő bordát, valamint a véglezáró / fenék - falat is, annak belső merevítésével együtt.



4. ábra

forrás: <http://www.schmanck.de/fass4.htm>

A 4. ábrán látható a fenékfal kívülről, annak három soros keresztmerezítése, továbbá a dongák bütüje és a dongákat összefogó, teherelosztó fa véglezáró gyűrű is.



5. ábra

forrás: <http://www.schmanck.de/fass8.htm>



6. ábra

forrás: <http://www.schmanck.de/fass9.htm>

Az 5. ábrán a fából készült abroncsokat láthatjuk, átlapolásos toldásukkal együtt. A 6. ábrán együtt szemlélhetjük a megtámasztásra felfekvő teherelosztó fa véglezáró gyűrűt, annak dupla vasszalagos kötésével együtt.



7. ábra

forrás: <http://www.schmanck.de/fass10.htm>



8. ábra

forrás: <http://www.schmanck.de/fass11.htm>

A 7. ábrán azt látjuk, hogy a hatalmas belső nyomás elviseléséhez sűrűn elhelyezett fa abroncsokkal erősítették a hordót.

A 8. ábrán a fenék vetemedését szemlélhetjük.



9. ábra

forrás: <http://www.schmanck.de/fass12.htm>

A 9. ábrán egy háromszög alakú szerkezeti részlet látható, az alsó megtámasztásnál.



10. ábra – forrás:

<http://www.schmanck.de/fass13.htm>



11. ábra – forrás:

<http://www.schmanck.de/fass14.htm>

A 10. és 11. ábrákon a felső ív dongái láthatóak.



12. ábra – forrás: <http://www.schmanck.de/fass15.htm>

A 12. ábrán a megtámasztó talpszerkezet kézműves munkájának szép részletei láthatóak.



13. ábra

forrás: <http://www.schmanck.de/fass16.htm>

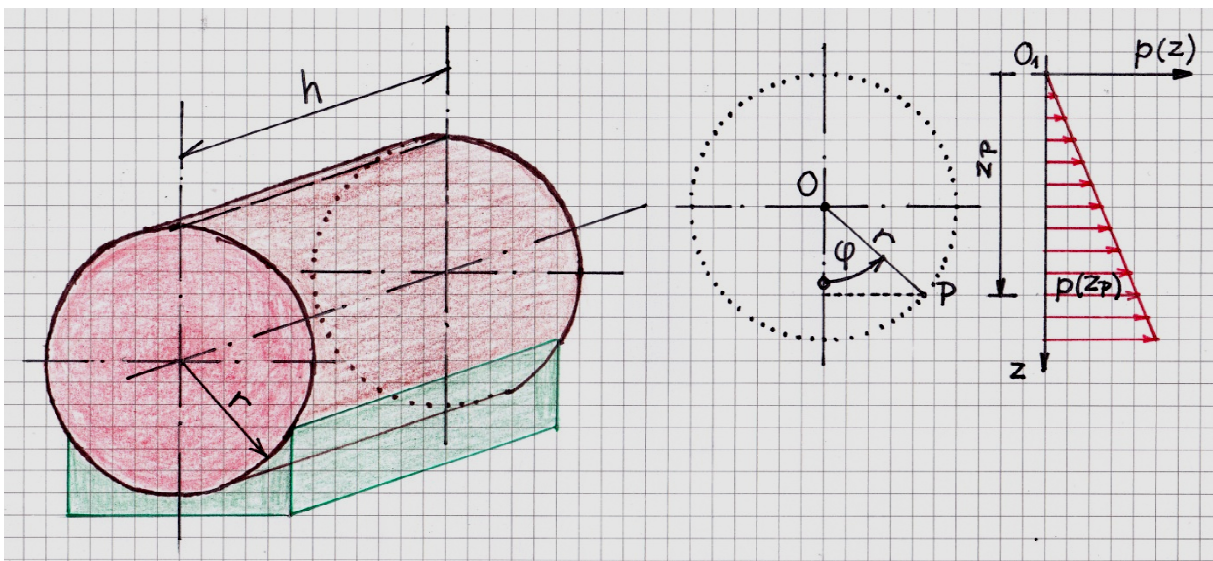
A 13. ábrán az egyik fa abroncs látható a támasztó talpak között.

A főbb szerkezeti részletek bemutatása után jöjjön egy hevenyészett fordítás a mintegy 141 m^3 űrtartalmú óriáshordó közelítő jellegű szilárdsági vizsgálatából.

A szerző a hordót közelítőleg egy hengernek tekinti, melynek falvastagsága kicsi a sugárához képest. A henger sugarát a hordó legnagyobb sugarával veszi egyenlőnek, amivel a lehető legnagyobb számítható terhelés - értékek állnak elő.

A szerkezet önsúlyától – az egyszerűbb fogalmazás kedvéért: a szerzővel együtt – eltekintünk; a borral teletöltött hordóra, annak fa donga - és végfalszerkezetére, valamint a fémmel erősített abroncsokra hidrosztatikai nyomóterhelés hat. A hordóabroncsokat úgy tekintjük, mintha hajlékony szalagok lennének, amik csak húzóterhelést vehetnek fel.

A számítási képletek levezetéséhez tekintsük a 14. ábrát is!



14. ábra

A hidrosztatikai nyomásra fennáll a folyadék mélységével való arányosság, így a henger belső felületének egy tetszőleges P pontjában:

$$p(z_p) = \gamma \cdot z_p ; \quad (1)$$

ismét a 14. ábra alapján:

$$z_p = r + r \cdot \cos \varphi = r \cdot (1 + \cos \varphi) ; \quad (2)$$

majd (1) és (2) szerint a hidrosztatikai nyomás nagysága:

$$p(\varphi) = \gamma \cdot r \cdot (1 + \cos \varphi) . \quad (3)$$

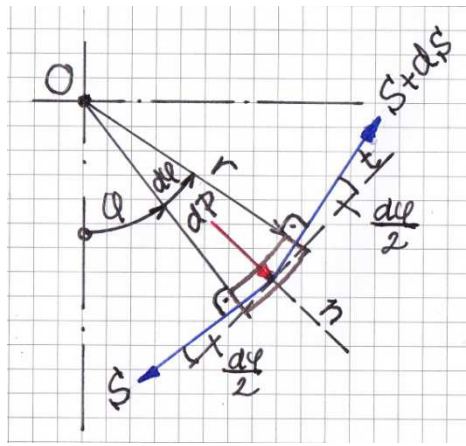
Itt γ a hordóban lévő folyadék – a bor – fajsúlya.

Most vegyük úgy, mintha hengerünk abroncsai nem diszkrét, hanem „folytosan megoszló elrendezésűek” lennének!

Ekkor a henger bármely keresztmetszetében erőtanilag ugyanazok a viszonyok áll(ná)nak fenn, így elegendő a henger egységnyi (1 méter) hosszúságú darabját vizsgálni, az ábracsozásban ébredő húzóerők vizsgálatához.

(Gátak, támfalak, alapok, stb. esetében is előfordul az ilyen egyszerűsített vizsgálat, amikor a szerkezet „síkbeli működésű”, vagyis amikor a hossz tengelyére merőleges különböző metszetei lényegében ugyanazokat a fizikai / erőtani, hidraulikai, stb. / jellegzetességeket mutatják.)

Ehhez tekintsük a 15. ábrát is!



15. ábra

Itt a hajlékony „kötél” egy $r d\varphi$ hosszúságú íveleméhez tartozó külső és belső erőket tüntettük fel, a kötélen adott „pontbeli” n normális és t tangenciális egyenesével együtt. A kötélen hajlítómerevséggel nem bír, vagyis a kötéldarabot hajlítónyomatékok nem terhelik, így az S és $S + dS$ húzóerők érintő irányúak.

Most felírunk két vetületi egyenletet – [2].

$$\sim \sum F_t = 0: -S \cdot \cos \frac{d\varphi}{2} + (S + dS) \cdot \cos \frac{d\varphi}{2} = 0,$$

innen:

$$dS = 0 \rightarrow S = konst. \quad (4)$$

Szavakban: a csak normális irányú külső terhelést viselő kötélen a kötélerő nagysága állandó értékű.

$$\sim \sum F_n = 0: +S \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} + (S + dS) \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} - dP = 0,$$

innen:

$$dP = 2 \cdot S \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} \cong 2 \cdot S \cdot \frac{d\varphi}{2} = S \cdot d\varphi,$$

tehát:

$$dP = S \cdot d\varphi. \quad (5)$$

Ámde a hidrosztatikai nyomásból származó, a nyomott felületre merőleges nyomóerő differenciálja:

$$dP = p \cdot dA = p \cdot r \cdot d\varphi \cdot 1 \text{ m}, \quad (6)$$

így (5) és (6) szerint:

$$S \cdot d\varphi = p \cdot r \cdot d\varphi \cdot 1 \text{ m},$$

innen:

$$S = p \cdot r \cdot 1 \text{ m}. \quad (7)$$

Most (3) és (7) - tel:

$$S = \gamma \cdot r^2 \cdot (1 + \cos \varphi) \cdot 1 \text{ m}. \quad (8)$$

E kötélerő maximuma:

$$S_{max} = S(\varphi = 0) = 2 \cdot \gamma \cdot r^2 \cdot 1 \text{ m}. \quad (9)$$

A fajsúlyt másképpen felírva:

$$\gamma = \rho \cdot g, \quad (10)$$

ahol ρ a bor sűrűsége, g a nehézségi gyorsulás nagysága.

Most (9) és (10) - zel:

$$S_{max} = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot r^2 \cdot 1 \text{ m}. \quad (11)$$

A (11) képlet az 1m - es hengerhosszra jutó kötélerő / abroncserőt adja meg.

A henger teljes h hosszára így:

$$S_{max}^* = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot r^2 \cdot h. \quad (12)$$

Ha ezt n darab abroncs veszi fel, akkor az egy abroncsra jutó legnagyobb erő:

$$\underline{\underline{S_1 = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot r^2 \cdot \frac{h}{n}}}. \quad (13)$$

A (13) képlet a hordófenék melletti esetre nyilván már nem érvényes, közelítőleg sem.

Most nézzük meg, hogy az [1] szerinti adatokkal mi jön ki a képletekkel!

Adatok:

$$r = 2,53 \text{ m}; \quad h = 7,56 \text{ m}; \quad \rho = 1000 \text{ kg} / \text{m}^3; \quad g = 9,81 \text{ m} / \text{s}^2; \quad n = 24 \text{ db}. \quad (A1)$$

Most (13) és (A) - val:

$$S_1 = 2 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2,53^2 \text{ m}^2 \cdot \frac{7,56 \text{ m}}{24} = 39559,48227 \text{ N} \approx 40\,000 \text{ N}. \quad (E1)$$

A belső abroncsok keresztmetszeti területe $A_1 = 0,03145 \text{ m}^2$, így a belső abroncsokban számított tangenciális húzófeszültség nagysága:

$$\sigma_{1,t} = \frac{S_1}{A_1} = \frac{40\,000 \text{ N}}{0,03145 \text{ m}^2} \approx 1271860 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \approx 1\,300\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \quad (E2)$$

Ha a jó minőségű tögyfa húzásra megengedett feszültsége $\sigma_t = 10\,000\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, akkor a

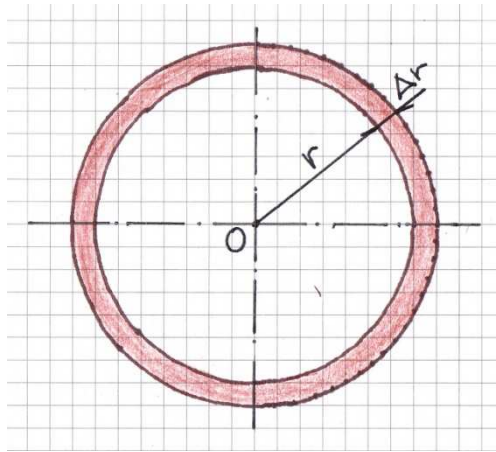
biztonsági tényező közel 8 - ra adódik. Ez jó. Ha a többrendbeli közelítést vesszük, még akkor is jó ez az eredmény.

Most nézzük meg, hogy mekkora a hordódongák tengelyirányú (axiális) átlagos húzó - feszültségének a nagysága. Ezt a

$$\sigma_{ax} = \frac{N}{A_{gy}} \quad (14)$$

képlettel határozhatjuk meg, közelítőleg. Ehhez ki kell számítani (14) számlálóját és nevezőjét. Kezdjük a nevezővel!

Ha a hordó falát képező, egymáshoz illesztett donga - sor keresztmetszeti területét akar - juk közelítőleg kiszámítani, akkor a 16. ábra szerint egy *körgyűrű* területét kell meghatá - roznunk.



16. ábra

Ennek képlete:

$$A_{gy} = (r + \Delta r)^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi = [2 \cdot r \cdot \Delta r + (\Delta r)^2] \cdot \pi = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \Delta r \cdot \left(1 + \frac{\Delta r}{2 \cdot r}\right);$$

minthogy

$$\frac{\Delta r}{2 \cdot r} \ll 1,$$

így esetünkben írható, hogy

$$A_{gy} \cong 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \Delta r. \quad (15)$$

[1] - ben azt írják, hogy a donga - falazatot terhelő hosszirányú erő nagysága

$N \approx 340 \text{ kN}$. Ha a dongák magassági mérete átlagosan $\Delta r = 0,185 \text{ m}$, akkor $r = 2,53 \text{ m}$ - rel is, (15) szerint:

$$A_{gy} \cong 2 \cdot \pi \cdot 2,53 \text{ m} \cdot 0,185 \text{ m} = 2,94084 \text{ m}^2. \quad (E3)$$

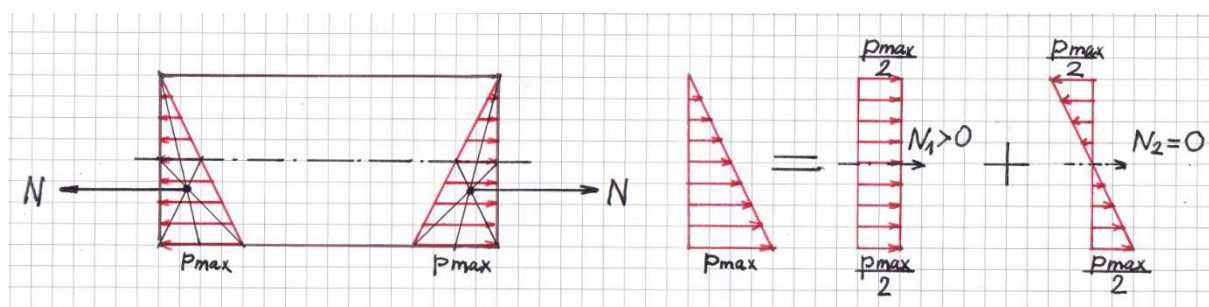
Ezzel és az előbb idézett hosszirányú erő - nagysággal, (14) szerint:

$$\sigma_{ax} = \frac{340\,000 \text{ N}}{2,94084 \text{ m}^2} = 115\,613 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \approx 116\,000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \quad (E^*)$$

Ez az érték szerepel [1] - ben is, ahol mindent nem részleteztek.

Ilyen pl. az N átlagos tengelyirányú erő nagysága is.

Most próbáljuk meg ezt is kiszámítani! Ehhez tekintsük a 17. ábrát is!



17. ábra

Itt azt szemléltettük, hogyan lehet felbontani az eredeti nyomáseloszlási ábrát két részre. Az ábra szerint a tengelyirányú erő nagysága, ami a fenéklapot nyomja, a dongákat pedig húzásra veszi igénybe:

$$N = N_1. \quad (16)$$

Ámde:

$$N_1 = \frac{p_{max}}{2} \cdot A_{fenék} = \frac{\gamma \cdot 2 \cdot r}{2} \cdot r^2 \cdot \pi, \quad (17)$$

majd (16) és (17) - tel:

$$N = \gamma \cdot r^3 \cdot \pi. \quad (18)$$

Ezután (10) és (18) - cal a dongákat terhelő átlagos tengelyirányú húzóerő nagysága:

$$N = \pi \cdot \rho \cdot g \cdot r^3. \quad (19)$$

Majd (19) szerint, behelyettesítve az adatokat is:

$$N = \pi \cdot \rho \cdot g \cdot r^3 = \pi \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2,53^3 \text{ m}^3 = 499091,8 \text{ N} \approx 500000 \text{ N} = 500 \text{ kN}; \quad (E4)$$

ez nem egyezik az [1] - ben talált, fentebb már említett $N \approx 340 \text{ kN}$ értékkel.

Ez azt jelenti, hogy az itteni számítás szerint az átlagos axiális húzófeszültség a dongák - ban (14), (E3) és (E4) szerint:

$$\sigma_{ax} = \frac{N}{A_{gy}} = \frac{500000 \text{ N}}{2,94084 \text{ m}^2} = 170019,4 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \approx 170000 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \quad (E5)$$

Ez lényegesen nagyobb, mint az [1] - ből származó (E*) érték.

A továbbiakat már nem részletezzük. Ennyiből is látható, hogy egy tényleges hordó szá - mítása még erős egyszerűsítő feltevésekkel is fáradságos munkára és bizonytalan, vagyis gyakran csak tájékoztató jellegű eredményekre vezet. Mégis, meg kell becsülni ezt a ke - veset is, mert egy valóságos hordó - szerkezet pontos(abb) erőtanai számítása ennél lénye - gesen nagyobb szellemi és anyagi ráfordítást igényelhet. Mi még nem láttunk ilyet.

Megjegyzések:

M1. Van egy olyan „belső ellentmondása” az itt tanulmányozott erőtani modellnek, amit e sorok *nem - fizikus* írója is felfedezett. Ugyanis a (4) képlet szerint a kötél erőssége a kötélen – tangenciális külső teher hiányában – *állandó* nagyságú, míg a (8) képlet egy $r = konst.$ sugarú körív mentén *változó* kötél erősséget ír le. Ezt az ellentmondást valahogy fel kellene oldani! Ehhez térjünk vissza az (5) képletéhez!

Eszerint:

$$dP = S \cdot d\varphi ; \quad (a)$$

$$dP = p_n \cdot dA = \gamma \cdot y \cdot R \cdot d\varphi \cdot 1 ; \quad (b)$$

itt R : a kötélen y mélységben lévő pontjának a görbületi sugara.

Most (a) és (b) - vel:

$$S \cdot d\varphi = \gamma \cdot y \cdot R \cdot d\varphi \cdot 1 ,$$

innen:

$$S = \gamma \cdot y \cdot R \cdot 1 . \quad (c)$$

Mivel (4) szerint

$$S = konst = S_0 , \quad (d)$$

így (c) és (d) szerint

$$S_0 = \gamma \cdot y \cdot R \cdot 1 ,$$

innen:

$$R = \frac{S_0}{\gamma \cdot y \cdot 1} ; \quad (e)$$

ez azt jelenti, hogy a kötélen / lepel görbületi sugarának a folyadék mélységével fordítottan arányosan kell(ene) változnia. Ekkor tehát $R \neq r$, így az egész számítás már emiatt is problémás, elvileg. Ezen tegyük túl magunkat! Ezt például úgy rendezhetjük el, hogy azt mondjuk: a hidrosztatikai nyomással terhelt nyújthatatlan és hajlításra lágy kötélen egyensúlyi alakja közel áll(hat) a körhöz, így azt egy (újabb) közelítéssel körnek tekintjük. Ezután felvesszük az $S = S_0$ - t, éppen a (11) szerinti S_{max} értékkel; ez is egy újabb közelítés lesz, ami talán még beférhet – az eléggé tágra meghúzott – határok közé, hiszen valószínűleg csak nagyságrendi tájékozódásról van itt szó.

M2. Minthogy az abroncsok a valóságban nem annyira hajlékonyak, tehát van véges hajlítómerevségük is, ezért talán úgy is elképzelhetünk egy újabb helyettesítő modellt, hogy a kezdetben körív tengelyvonalú abroncs - rúd, illetve az elosztott jelleg miatt az abroncs - henger a hidrosztatikus terhelés hatására deformálódik, majd itt, a deformáció lezajlása utáni helyzetében, megmerevítettnek képzeljük. Minthogy várhatóan a deformált tengelyvonalra, illetve héj - középfelületre $R \approx r$, így visszatérhetünk az eredeti munkamenethez.

M3. Ezek itt csak spekulációk. Látjuk, hogy az a bizonyos cipő szinte mindenhol szorít.

M4. A 17. ábra után mondottak szerint az axiális erő általunk számított értéke nagyon nem egyezik az [1] - ben olvasható értékkel. Most kíséreljünk meg egy másik számítást! Eszerint a hordófenék sugarával alkalmazzuk (19) - et; ekkor az [1] szerinti

$r_f = 2,24 \text{ m}$ értékkel:

$$N = \pi \cdot \rho \cdot g \cdot r_f^3 = \pi \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2,24^3 \text{ m}^3 = 346388 \text{ N} \approx 346 \text{ kN}.$$

Ez már jóval közelebb van a szövegbeli cca. **340 kN** értékhez. Tovább nem találgatunk.

Irodalom:

[1] – **Ludger Winkelmann**: Die Vermessung des Gröninger Fasses
www.schmanck.de/Vermessung.doc

[2] – **Kurt Beyer**: Technische Mechanik für Bauingenieure
 S. Hirzel Verlag Leipzig, 1954., 97. o.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
 mérnök tanár

Sződliget, 2014. 06. 26.