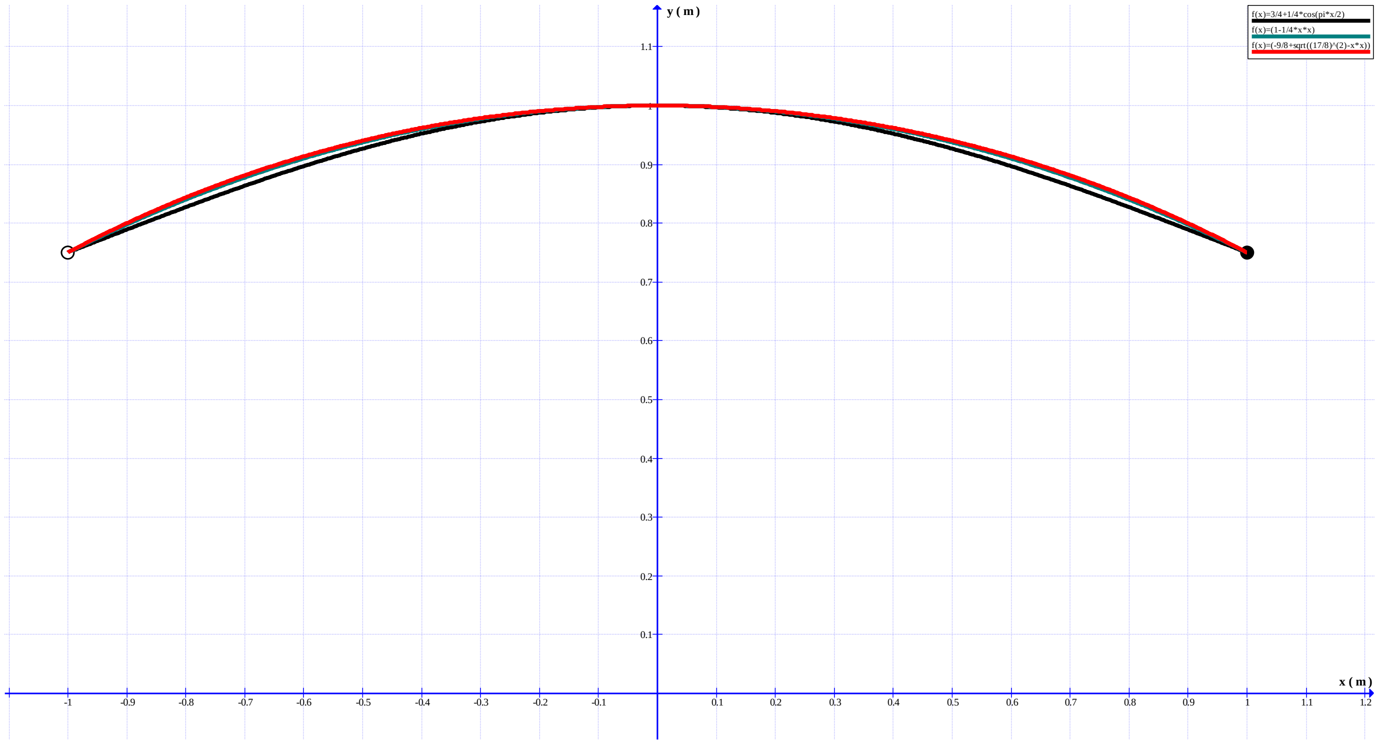
A fa hordók geometriájáról

Érdekesnek ígérkezik a címbeli témán elmolyolni egy keveset. Itt, bár vannak, nem nagyon kell keresni az elméleti mélységeket, hiszen ez csak egy ujjgyakorlat lesz.
A könyvekben lapozgatva azt láttam, hogy leginkább az alábbi három *donga*alak - fajta fordul elő, közelítésként: a koszinusz - , a parabola - és a körív - darab szerinti. Ezeket mutatom meg együtt egy példán, az 1. ábrán.



1. ábra

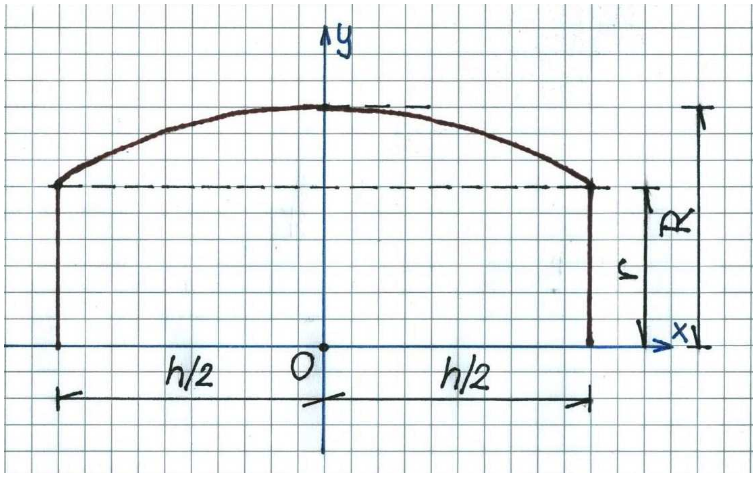
Jól látszik, hogy a példabeli görbék csak kevéssé térnek el egymástól.
Először ezek egyenletét írjuk fel.

I. A hordódonga alakjának koszinusz - görbével való közelítése

Erre a dongagörbe - fajtára [1] - ben bukkantam rá. Ott nem pont úgy dolgoztak vele, mint én itt.
Az alkalmazott jelöléseket a 2. ábrán mutatom meg.
A hordó sugara egy

$$y(x) = r + (R - r) \cdot \cos\alpha(x) \qquad (1)$$

alakú függvénnyel írható le,
ahol:



2. ábra

$$\left.\begin{aligned} -\frac{h}{2} \le x \le \frac{h}{2} \ , \\ r \le y \le R \ . \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Az ***α(x)*** argumentum meghatározásához az alábbi arányosságot alkalmazzuk:

$$\frac{\alpha}{\pi/2} = \frac{x}{h/2} \ ,$$

innen:

$$\alpha = \pi \cdot \frac{x}{h} \ . \qquad (3)$$

Most (1) és (3) - mal:

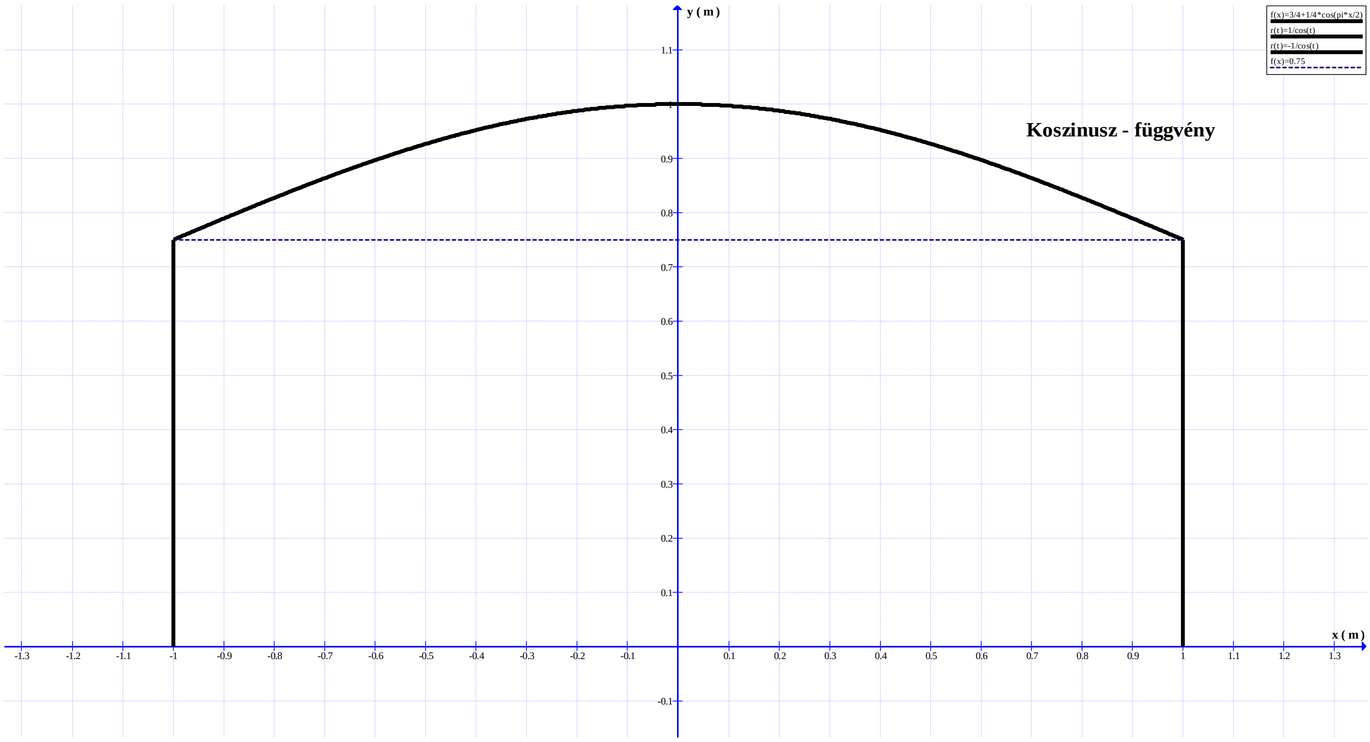
$$\underline{\underline{y(x) = r + (R - r) \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{x}{h}\right) \ .}} \qquad (4)$$

Az ábrázolási példához választott *adatok*:
R = 1 m; r = 3 / 4 m; h = 2 m. (A)

Majd (4) és (A) - val:

$$y(x) = 3/4 + 1/4 \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{x}{2}\right) \ (\mathrm{m}) \ . \qquad (5)$$

Az (5) függvény grafikonja a 3. ábrán szemlélhető.



3. ábra

II. A hordódonga alakjának parabola - görbével való közelítése

Ez a téma részletesen kidolgozva megtalálható [2] - ben is.
A 2. ábra jelöléseivel a másodfokú parabola egyenlete:

$$y(x) = R - k \cdot x^2, \qquad (6)$$

ahol ***k*** egy meghatározandó állandó. Meghatározásához azt a feltételt használjuk fel, hogy

$$y\left(x = \frac{h}{2}\right) = r\ ; \qquad (7)$$

most (6) és (7) - tel:

$$r = R - k \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2, \qquad (8)$$

innen:

$$k = \frac{R - r}{\left(\frac{h}{2}\right)^2}\ ; \qquad (9)$$

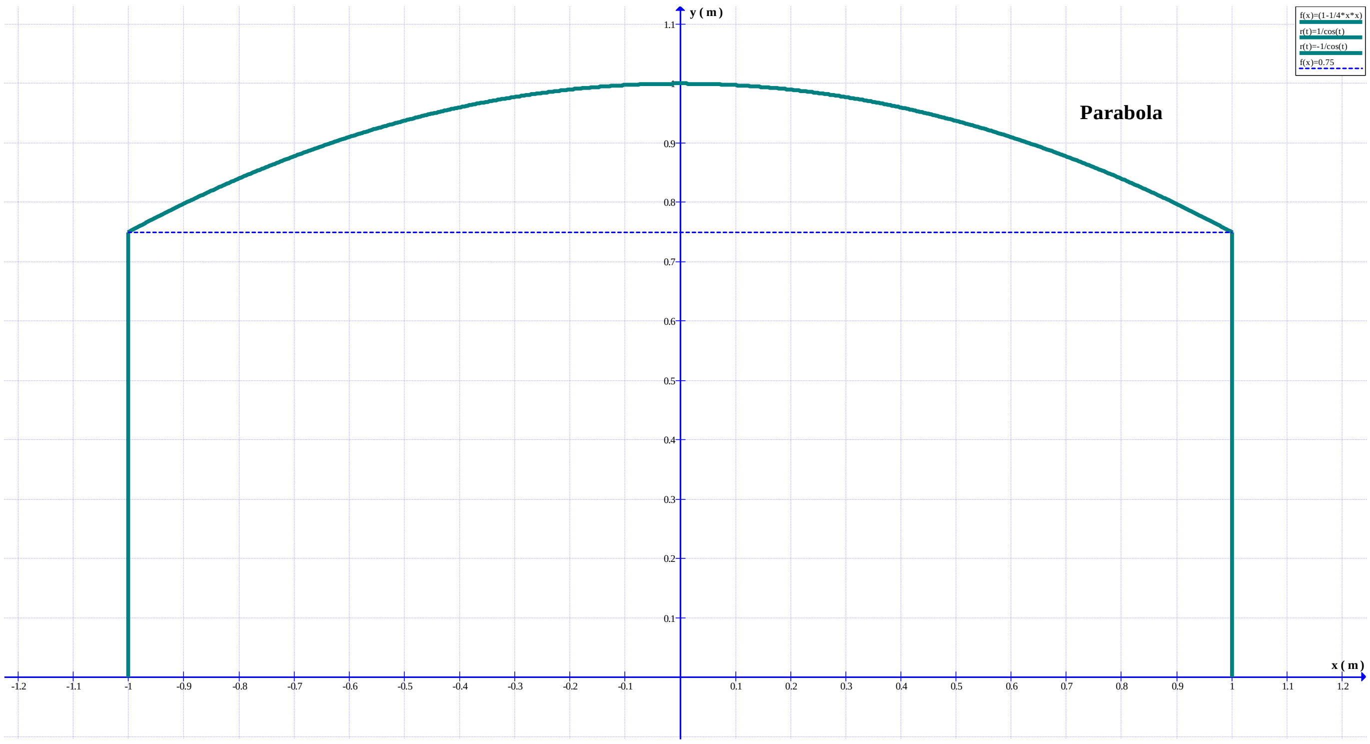
ezután (6) és (9) - cel:

$$\underline{\underline{y(x) = R - 4 \cdot (R - r) \cdot \left(\frac{x}{h} \right)^2 .}} \qquad (10)$$

Most (10) és (A) - val számszerűen:

$$y(x) = 1 - \frac{1}{4} \cdot x^2 \ \ (\mathrm{m}) \ . \qquad (11)$$

A (11) függvény grafikonja a 4. ábrán szemlélhető.



4. ábra

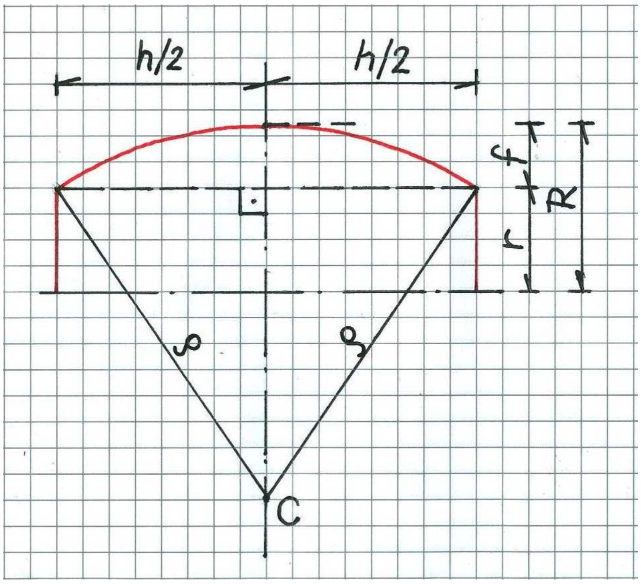
III. A hordódonga alakjának körívvel való közelítése

Először meghatározzuk a körív ***ρ*** sugarát. Ehhez tekintsük az 5. ábrát is!
Pitagorász tételével kapjuk, hogy

$$\rho^2 = (\rho - f)^2 + \left(\frac{h}{2} \right)^2 , \qquad (12)$$

ahol:

$$f = R - r \ . \qquad (13)$$



5. ábra

Most (12) - t kifejtve és rendezve:

$$\rho^2 = \rho^2 - 2\cdot f\cdot\rho + f^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 ,$$

$$2\cdot f\cdot\rho = f^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 ,$$

$$\rho = \frac{f^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}{2\cdot f} = \frac{f}{2} + \frac{h^2}{8\cdot f} ,$$

tehát:

$$\rho = \frac{f}{2} + \frac{h^2}{8\cdot f} . \qquad (14)$$

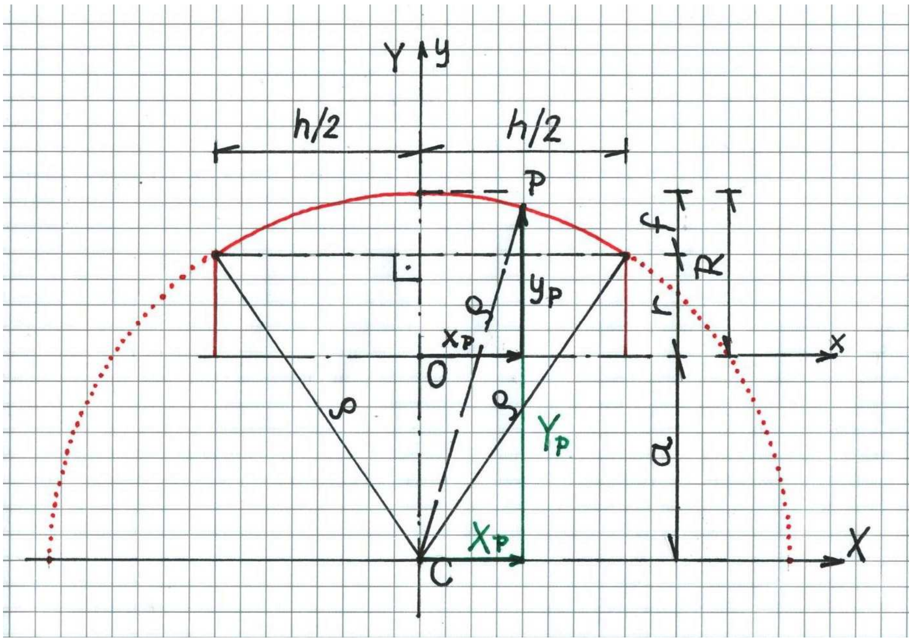
Majd (13) és (14) - gyel:

$$\rho = \frac{R-r}{2} + \frac{h^2}{8\cdot(R-r)} . \qquad (15)$$

Most felírjuk a kör egyenletét. Ehhez tekintsük a 6. ábrát is!
A donga - körív egy kiválasztott ***P*** pontjára Pitagorász - tétellel, elhagyva a $_P$ indexet:

$$X^2 + Y^2 = \rho^2 \rightarrow Y^2 = \rho^2 - X^2 ; \qquad (16)$$

ámde a 6. ábra szerint is fennállnak az alábbi összefüggések:



6. ábra

$$\left.\begin{aligned} X &= x \ , \\ Y &= y + a \ , \\ a &= \rho - R \ , \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

így (16) és (17) - tel kapjuk, hogy

$$\left(y+a\right)^2 = \rho^2 - x^2 \rightarrow y + a = \sqrt{\rho^2 - x^2} \rightarrow y = \sqrt{\rho^2 - x^2} - a = \sqrt{\rho^2 - x^2} - \left(\rho - R\right) \ ,$$

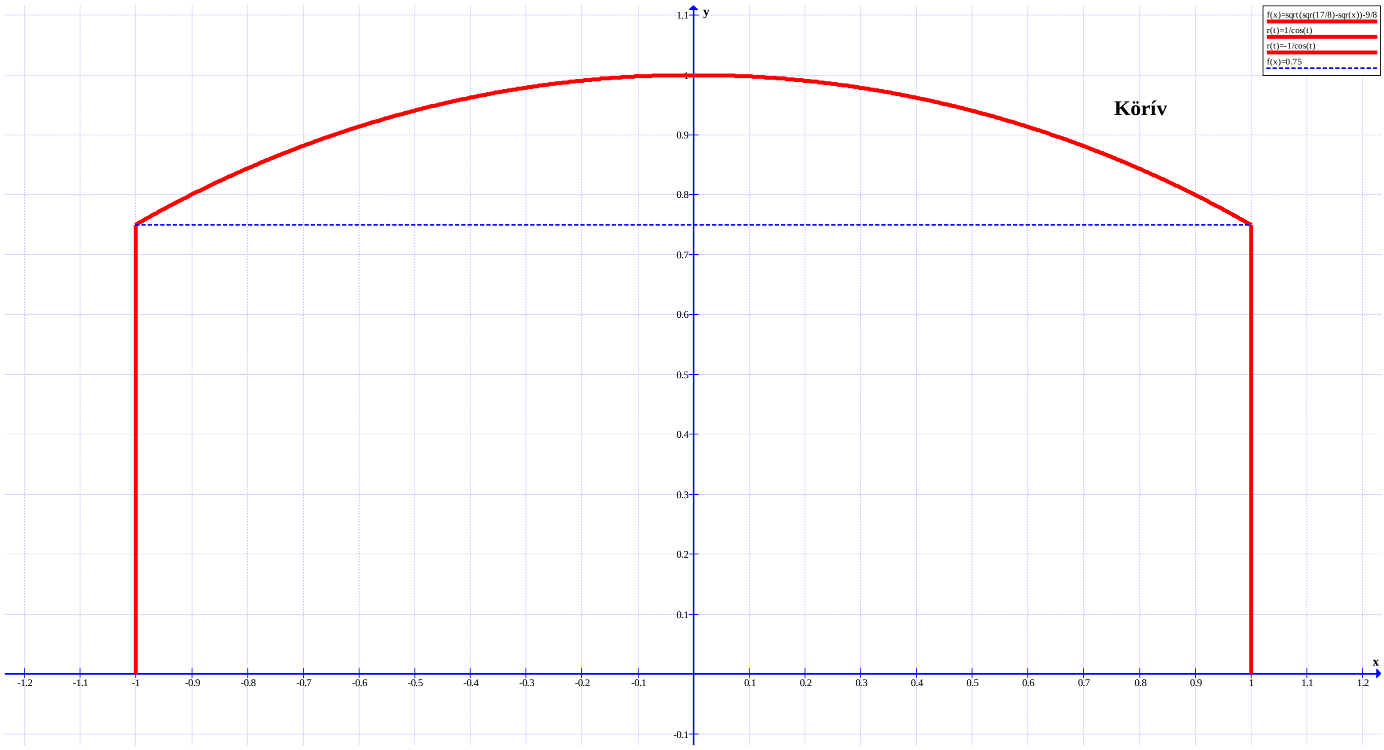
tehát:

$$\underline{\underline{y\left(x\right) = \sqrt{\rho^2 - x^2} - \left(\rho - R\right)}} \ . \qquad (18)$$

Most (A), (15) és (18) - cal:

$$y\left(x\right) = \sqrt{\left(\frac{17}{8}\right)^2 - x^2} - \frac{9}{8} \ \text{(m)} \ . \qquad (19)$$

A (19) függvény grafikonja a 7. ábrán szemlélhető.



7. ábra

Eddig a donga alakjával foglalkoztunk. Most meghatározzuk az adott donga - alakú hordó térfogatát. A forgástest térfogatát megadó általános képlet – [1], [2], [3] – :

$$V = \pi \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \left(x \right) \, dx \; ; \qquad (20)$$

azonban a szimmetria miatt elegendő a félhordó térfogat - képletével dolgoznunk, majd a kapott eredmény kétszeresét vennünk:

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_{0}^{\frac{h}{2}} y^2 \left(x \right) \, dx \; . \qquad (21)$$

A térfogat - eredményre egy további ellenőrzést ad az alábbi reláció:

$$V_r^{henger} < V_{hordó} < V_R^{henger} \rightarrow r^2 \cdot \pi \cdot h < V_{hordó} < R^2 \cdot \pi \cdot h \; . \qquad (22)$$

1. A koszinusz - görbe dongájú hordó térfogatának meghatározása

Most (4) és (21) - gyel:

$$V_{\cos} = 2 \cdot \pi \cdot \int_{0}^{\frac{h}{2}} \left[r + \left(R - r \right) \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{x}{h} \right) \right]^2 \, dx \; . \qquad (23)$$

Most az

$$u(x)=\pi\cdot\frac{x}{h} \qquad (24)$$

helyettesítéssel (4) és (24) szerint adódik, hogy

$$\left.\begin{aligned} & y(u)=r+(R-r)\cdot\cos u(x)\ ,\\ & u(x=0)=0\ ,\\ & u\left(x=\frac{h}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\ ,\\ & dx=\frac{h}{\pi}\ du\ . \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Majd (23) és (25) - tel:

$$V_{\cos}=2\cdot h\ \cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[r+(R-r)\cdot\cos u\right]^2\ du\equiv 2\cdot h\ \cdot I\ . \qquad (26)$$

Az ***I*** határozott integrál kiszámítása az alábbiak szerinti.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[r+(R-r)\cdot\cos u\right]^2\ du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[r^2+2\cdot r\cdot(R-r)\cdot\cos u+(R-r)^2\cdot\cos^2 u\right]\ du=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2du+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cdot r\cdot(R-r)\cdot\cos u\ du+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(R-r)^2\cdot\cos^2 u\ du=$$

$$=r^2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}du+2\cdot r\cdot(R-r)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\ du+(R-r)^2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\ du=$$

$$=r^2\cdot I_1+2\cdot r\cdot(R-r)\cdot I_2+(R-r)^2\cdot I_3\ ,$$

tehát:

$$\left.\begin{aligned} & I=r^2\cdot I_1+2\cdot r\cdot(R-r)\cdot I_2+(R-r)^2\cdot I_3\ ,\\ & I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}du\ ,\ \ I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\ du\ ,\ \ I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\ du\ . \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Az $\boldsymbol{I_i}$ (i : 1, 2, 3) integrálokhoz [3] táblázatából vesszük ki a primitív függvényeket:

$$\left.\begin{aligned}
&I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} du=\left[u\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}\ ;\\
&I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\ du=\left[\sin u\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1-0=1\ ;\\
&I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\ du=\left[\frac{1}{2}\cdot u+\frac{1}{4}\cdot\sin\left(2\cdot u\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(2\cdot 0\right)\right)=\\
&\quad=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\cdot\left(\sin\left(\pi\right)-\sin\left(0\right)\right)=\frac{\pi}{4}\ .
\end{aligned}\right\}$$

(28)

Ezután (27) és (28) - cal:

$$\begin{aligned}
I&=\frac{\pi}{2}\cdot r^2+2\cdot r\cdot\left(R-r\right)+\frac{\pi}{4}\cdot\left(R-r\right)^2=\\
&=\frac{\pi}{2}\cdot r^2+2\cdot r\cdot R-2\cdot r^2+\frac{\pi}{4}\cdot\left(R^2-2\cdot R\cdot r+r^2\right)=\\
&=r^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-2+\frac{\pi}{4}\right)+r\cdot R\cdot\left(2-\frac{\pi}{2}\right)+R^2\cdot\frac{\pi}{4}\ ,
\end{aligned}$$

tehát:

$$I=r^2\cdot\left(\frac{3\cdot\pi}{4}-2\right)+r\cdot R\cdot\left(2-\frac{\pi}{2}\right)+R^2\cdot\frac{\pi}{4}\ ; \qquad (29)$$

majd (26) és (29) - cel:

$$V_{\cos}=2\cdot h\cdot\left[r^2\cdot\left(\frac{3\cdot\pi}{4}-2\right)+r\cdot R\cdot\left(2-\frac{\pi}{2}\right)+R^2\cdot\frac{\pi}{4}\right]=h\cdot\left[\left(\frac{3\cdot\pi}{2}-4\right)\cdot r^2+\left(4-\pi\right)\cdot r\cdot R+\frac{\pi}{2}\cdot R^2\right],$$

tehát:

$$\underline{V_{\cos}=h\cdot\left[\left(\frac{3\cdot\pi}{2}-4\right)\cdot r^2+\left(4-\pi\right)\cdot r\cdot R+\frac{\pi}{2}\cdot R^2\right].} \qquad (30)$$

Most áttérünk a sugarakról a könnyebben mérhető átmérőkre az

$$\left.\begin{aligned}
r&=\frac{d}{2}\ ,\\
R&=\frac{D}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

képletekkel. Ekkor (30) és (31) - gyel:

$$V_{\cos} = \frac{h}{4} \cdot \left[\left(\frac{3 \cdot \pi}{2} - 4 \right) \cdot d^2 + (4 - \pi) \cdot d \cdot D + \frac{\pi}{2} \cdot D^2 \right] =$$

$$= \frac{h}{8} \cdot \left[(3 \cdot \pi - 8) \cdot d^2 + (8 - 2 \cdot \pi) \cdot d \cdot D + \pi \cdot D^2 \right] ,$$

tehát:

$$\underline{\underline{V_{\cos} = \frac{h}{8} \cdot \left[(3 \cdot \pi - 8) \cdot d^2 + (8 - 2 \cdot \pi) \cdot d \cdot D + \pi \cdot D^2 \right] .}} \qquad (32)$$

Számpélda

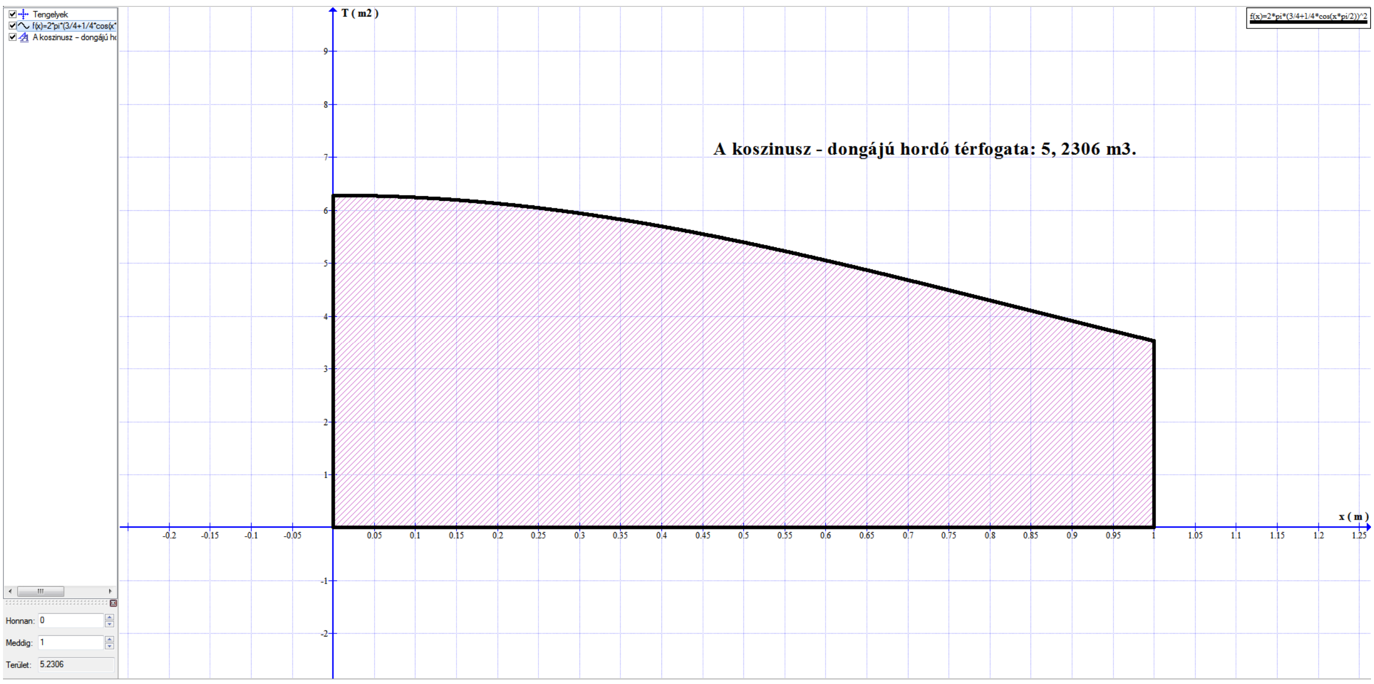
Most (A) és (30) szerint:

$$V_{\cos} = 2\ (\mathrm{m}) \cdot \left[\left(\frac{3 \cdot \pi}{2} - 4 \right) \cdot \frac{9}{16} + (4 - \pi) \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{\pi}{2} \cdot 1^2 \right] \left(\mathrm{m}^2\right) = 5,230641276\ \mathrm{m}^3 \approx 5,2306\ \left(\mathrm{m}^3\right) ,$$

tehát:

$$\underline{\underline{V_{\cos} \cong 5,2306\ \mathrm{m}^3\ .}} \qquad (\mathrm{E}\ \cos - 1)$$

Ugyanezt numerikus integrálással elvégezve – 8. ábra:



8. ábra

$$\underline{\underline{V_{\cos} \cong 5,2306\ \mathrm{m}^3\ .}} \qquad (\mathrm{E}\ \cos - 2)$$

Ez megegyezik (E cos - 1) - gyel.
Most (22) szerint is ellenőrizve:

$$\left.\begin{array}{l} r^2\cdot\pi\cdot h < V_{hordó} < R^2\cdot\pi\cdot h\ , \\ V_{hordó,\cos}\cong 5,2306\ \left(\mathrm{m}^3\right)\ , \\ r^2\cdot\pi\cdot h=\dfrac{9}{16}\ \left(\mathrm{m}^2\right)\cdot\pi\cdot 2\ (\mathrm{m})\approx 3,5343\ \left(\mathrm{m}^3\right)\ , \\ R^2\cdot\pi\cdot h = 1^2\ \left(\mathrm{m}^2\right)\cdot\pi\cdot 2\ (\mathrm{m})\approx 6,2832\ \left(\mathrm{m}^3\right)\ , \end{array}\right\}\rightarrow 3,5343\ \mathrm{m}^3 < 5,2306\ \mathrm{m}^3 < 6,2832\ \mathrm{m}^3\ .$$

Ez is teljesül. ☺

2. A parabola - dongájú hordó térfogatának meghatározása

Most (10) és (21) - gyel:

$$V_{par}=2\cdot\pi\cdot\int_0^{\frac{h}{2}}\left[R-4\cdot(R-r)\cdot\left(\frac{x}{h}\right)^2\right]^2\ dx = 2\cdot\pi\cdot J\ , \tag{33}$$

$$J=\int_0^{\frac{h}{2}}\left[R-4\cdot(R-r)\cdot\left(\frac{x}{h}\right)^2\right]^2\ dx=\int_0^{\frac{h}{2}}\left[R^2-8\cdot R\cdot(R-r)\cdot\left(\frac{x}{h}\right)^2+16\cdot(R-r)^2\cdot\left(\frac{x}{h}\right)^4\right]dx=$$

$$=R^2\cdot\int_0^{\frac{h}{2}}dx-8\cdot\frac{R\cdot(R-r)}{h^2}\cdot\int_0^{\frac{h}{2}}x^2\ dx+16\cdot\frac{(R-r)^2}{h^4}\cdot\int_0^{\frac{h}{2}}x^4\ dx=$$

$$=R^2\cdot[x]_0^{\frac{h}{2}}-8\cdot\frac{R\cdot(R-r)}{h^2}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{h}{2}}+16\cdot\frac{(R-r)^2}{h^4}\cdot\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\frac{h}{2}}=$$

$$=R^2\cdot\frac{h}{2}-\frac{8}{3}\cdot\frac{R\cdot(R-r)}{h^2}\cdot\frac{h^3}{8}+\frac{16}{5}\cdot\frac{(R-r)^2}{h^4}\cdot\frac{h^5}{32}=\frac{h}{2}\cdot R^2-\frac{h}{3}\cdot R\cdot(R-r)+\frac{h}{10}\cdot(R-r)^2=$$

$$=\frac{h}{2}\cdot\left[R^2-\frac{2}{3}\cdot R\cdot(R-r)+\frac{1}{5}\cdot(R-r)^2\right]=\frac{h}{2}\cdot\left[R^2-\frac{2}{3}\cdot R^2+\frac{2}{3}\cdot R\cdot r+\frac{1}{5}\cdot\left(R^2-2\cdot R\cdot r+r^2\right)\right]=$$

$$=\frac{h}{2}\cdot\left[R^2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+R\cdot r\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)+r^2\cdot\frac{1}{5}\right]=\frac{h}{2}\cdot\left[R^2\cdot\frac{8}{15}+R\cdot r\cdot\frac{4}{15}+r^2\cdot\frac{3}{15}\right]=$$

$$=\frac{h}{2\cdot 15}\cdot\left[8\cdot R^2+4\cdot R\cdot r+3\cdot r^2\right]\ ,$$

tehát:

$$J=\frac{h}{30}\cdot\left[8\cdot R^2+4\cdot R\cdot r+3\cdot r^2\right]\ ; \tag{34}$$

majd (33) és (34) - gyel:

$$V_{par} = \frac{\pi \cdot h}{15} \cdot \left[8 \cdot R^2 + 4 \cdot R \cdot r + 3 \cdot r^2 \right] . \qquad (35)$$

Ezután (31) és (35) - tel:

$$\underline{\underline{V_{par} = \frac{\pi \cdot h}{15} \cdot \left[2 \cdot D^2 + D \cdot d + \frac{3}{4} \cdot d^2 \right]}} . \qquad (36)$$

Ezt a képletet [2] - ben is levezetik.

Számpélda

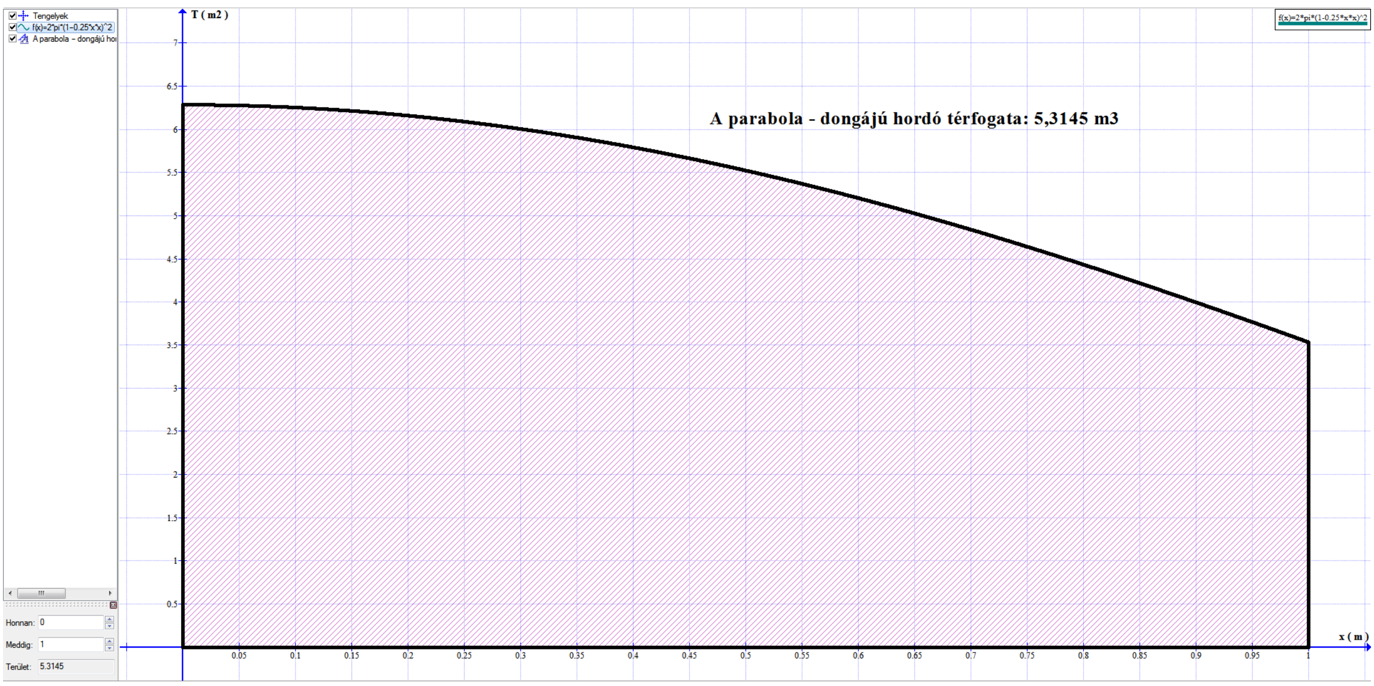
Most (A) és (35) szerint:

$$V_{par} = \frac{\pi \cdot 2 \text{ (m)}}{15} \cdot \left[8 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{9}{16} \right] \text{ (m}^2\text{)} = 5{,}314527572 \text{ (m}^3\text{)} \approx 5{,}3145 \text{ (m}^3 \text{)} ,$$

tehát:

$$\underline{\underline{V_{par} \cong 5{,}3145 \text{ m}^3}} . \qquad (\text{ E par - 1 })$$

Ugyanezt numerikus integrálással elvégezve – 9. ábra:



9. ábra

$$\underline{\underline{V_{par} \cong 5,3145\ \mathrm{m}^3}}\ . \qquad \text{(E par - 2)}$$

Ez megegyezik (E par - 1) - gyel.
Most (22) szerint is ellenőrizve:

$$\left.\begin{aligned} & r^2\cdot\pi\cdot h < V_{hordó} < R^2\cdot\pi\cdot h\ , \\ & V_{hordó,\,par} \cong 5,3145\ \left(\mathrm{m}^3\right)\ , \\ & r^2\cdot\pi\cdot h = \frac{9}{16}\ \left(\mathrm{m}^2\right)\cdot\pi\cdot 2\ (\mathrm{m}) \approx 3,5343\ \left(\mathrm{m}^3\right)\ , \\ & R^2\cdot\pi\cdot h = 1^2\ \left(\mathrm{m}^2\right)\cdot\pi\cdot 2\ (\mathrm{m}) \approx 6,2832\ \left(\mathrm{m}^3\right)\ , \end{aligned}\right\} \rightarrow 3,5343\ \mathrm{m}^3 < 5,3145\ \mathrm{m}^3 < 6,2832\ \mathrm{m}^3\ .$$

Ez is teljesül. ☺

3. A körív - dongájú hordó térfogatának meghatározása

Most (18) és (21) - gyel:

$$V_{kör} = 2\cdot\pi\cdot\int_0^{\frac{h}{2}}\left[\sqrt{\rho^2-x^2}-(\rho-R)\right]^2\ dx = 2\cdot\pi\cdot K\ , \qquad (37)$$

ahol:

$$K = \int_0^{\frac{h}{2}}\left[\rho^2-x^2-2\cdot(\rho-R)\cdot\sqrt{\rho^2-x^2}+(\rho-R)^2\right]\ dx =$$

$$=\left[\rho^2+(\rho-R)^2\right]\cdot\int_0^{\frac{h}{2}}dx-\int_0^{\frac{h}{2}}x^2\ dx-2\cdot(\rho-R)\cdot\int_0^{\frac{h}{2}}\sqrt{\rho^2-x^2}\ dx =$$

$$=\left[\rho^2+(\rho-R)^2\right]\cdot[x]_0^{\frac{h}{2}}-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{h}{2}}-2\cdot(\rho-R)\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\left(x\cdot\sqrt{\rho^2-x^2}+\rho^2\cdot\arcsin\frac{x}{\rho}\right)\right]_0^{\frac{h}{2}} =$$

$$=\left[\rho^2+(\rho-R)^2\right]\cdot\frac{h}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{h^3}{8}-2\cdot(\rho-R)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{h}{2}\cdot\sqrt{\rho^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2}+\rho^2\cdot\arcsin\frac{h}{2\cdot\rho}\right] =$$

$$=\frac{h}{2}\cdot\left\{\rho^2+(\rho-R)^2-\frac{h^2}{12}-(\rho-R)\cdot\left[\sqrt{\rho^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2}+\frac{2}{h}\cdot\rho^2\cdot\arcsin\frac{h}{2\cdot\rho}\right]\right\}\ ,$$

tehát:

$$K=\frac{h}{2}\cdot\left\{\rho^2+(\rho-R)^2-\frac{h^2}{12}-(\rho-R)\cdot\left[\sqrt{\rho^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2}+\frac{2}{h}\cdot\rho^2\cdot\arcsin\frac{h}{2\cdot\rho}\right]\right\}\cdot \quad (38)$$

Most (37) és (38) - cal:

$$V_{kör}=\pi\cdot h\cdot\left\{\rho^2+(\rho-R)^2-\frac{h^2}{12}-(\rho-R)\cdot\left[\sqrt{\rho^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2}+\frac{2}{h}\cdot\rho^2\cdot\arcsin\frac{h}{2\cdot\rho}\right]\right\}=$$

$$=\pi\cdot h\cdot\rho^2\cdot\left\{1+\left(1-\frac{R}{\rho}\right)^2-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{2\cdot\rho}\right)^2-\left(1-\frac{R}{\rho}\right)\cdot\left[\sqrt{1-\left(\frac{h}{2\cdot\rho}\right)^2}+\frac{\arcsin\frac{h}{2\cdot\rho}}{\frac{h}{2\cdot\rho}}\right]\right\},$$

tehát:

$$V_{kör}=\pi\cdot h\cdot\rho^2\cdot\left\{1+\left(1-\frac{R}{\rho}\right)^2-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{2\cdot\rho}\right)^2-\left(1-\frac{R}{\rho}\right)\cdot\left[\sqrt{1-\left(\frac{h}{2\cdot\rho}\right)^2}+\frac{\arcsin\frac{h}{2\cdot\rho}}{\frac{h}{2\cdot\rho}}\right]\right\}. \quad (39)$$

Számpélda

Most (A) és (15) - tel:

$$\left.\rho=\frac{17}{8}\ (\mathrm{m}),\quad 1-\frac{R}{\rho}=1-\frac{1}{\frac{17}{8}}=1-\frac{8}{17}=\frac{9}{17}\ ;\quad \frac{h}{2\cdot\rho}=\frac{2}{2\cdot\frac{17}{8}}=\frac{8}{17}\ .\right\} \quad (B)$$

Majd (39) és (B) - vel:

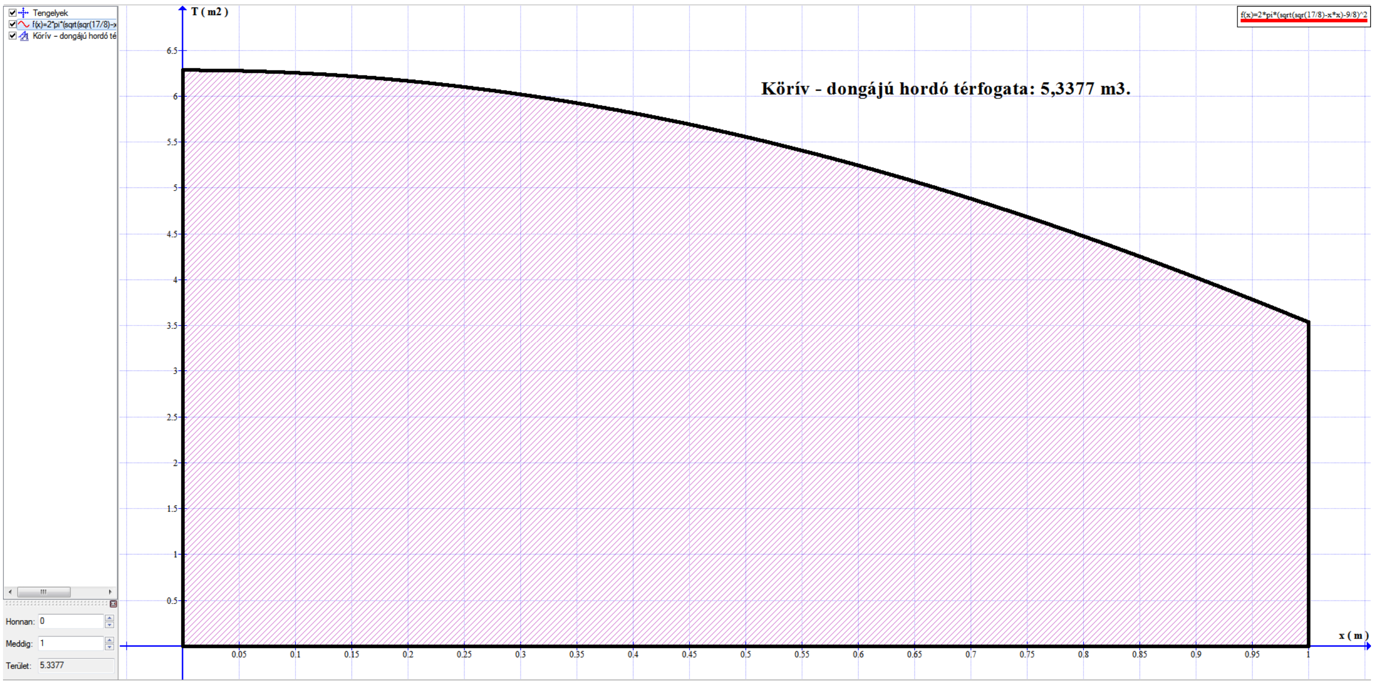
$$V_{kör}=\pi\cdot 2\ (\mathrm{m})\cdot\left(\frac{17}{8}\right)^2(\mathrm{m}^2)\cdot\left\{1+\left(\frac{9}{17}\right)^2-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{8}{17}\right)^2-\frac{9}{17}\cdot\left[\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}+\frac{\arcsin\frac{8}{17}}{\frac{8}{17}}\right]\right\}=$$

$$=5{,}337692658\ \mathrm{m}^3\ ,$$

tehát:

$$\underline{\underline{V_{k\ddot{o}r} \cong 5,3377\ \mathrm{m}^3}}\ . \qquad (\text{ E kör - 1 })$$

Ugyanezt numerikus integrálással elvégezve – 10. ábra:



10. ábra

$$\underline{\underline{V_{k\ddot{o}r} \cong 5,3377\ \mathrm{m}^3}}\ . \qquad (\text{ E kör - 2 })$$

Ez megegyezik (E kör - 1) - gyel.
Most (22) szerint is ellenőrizve:

$$\left.\begin{aligned} & r^2 \cdot \pi \cdot h < V_{hord\acute{o}} < R^2 \cdot \pi \cdot h\ , \\ & V_{hord\acute{o},k\ddot{o}r} \cong 5,3377\ \left(\mathrm{m}^3\right)\ , \\ & r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{9}{16}\ \left(\mathrm{m}^2\right) \cdot \pi \cdot 2\ (\mathrm{m}) \approx 3,5343\ \left(\mathrm{m}^3\right)\ , \\ & R^2 \cdot \pi \cdot h = 1^2\ \left(\mathrm{m}^2\right) \cdot \pi \cdot 2\ (\mathrm{m}) \approx 6,2832\ \left(\mathrm{m}^3\right)\ , \end{aligned}\right\} \rightarrow 3,5343\ \mathrm{m}^3 < 5,3377\ \mathrm{m}^3 < 6,2832\ \mathrm{m}^3\ .$$

Ez is teljesül. ☺

Megjegyzések:

M1. A számpélda - térfogatok összegyűjtve:

$$\left.\begin{aligned} V_{\cos} &\cong 5,2306\ \mathrm{m}^3\ , \\ V_{par} &\cong 5,3145\ \mathrm{m}^3\ , \\ V_{kör} &\cong 5,3377\ \mathrm{m}^3\ . \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{C})$$

Eszerint a körrel való közelítéssel kapjuk a legnagyobb térfogatot; v. ö.: 1. ábra.
A legnagyobb és a legkisebb térfogat százalékos eltérése:

$$\delta_V = \frac{5,3377\ \mathrm{m}^3 - 5,2306\ \mathrm{m}^3}{5,3377\ \mathrm{m}^3} \cdot 100 = 2,0\ \%\ , \qquad (\mathrm{D})$$

ami nem nagy érték.

M2. A térfogatszámítás során három lépcsőt jártunk be:
~ integrálás primitív függvénnyel,
~ integrálás numerikusan,
~ ellenőrzés a közrefogó hengerek térfogatával.
Ez elsőre talán túlzásnak tűnhet. Hogy nem az, azt maga az élet mutatja meg minden - kinek. Például a primitív függvénnyel való számolás közben elkövetett hibát valószí - nűleg felderíthetjük a numerikus integrálással, majd mindkettőt ellenőrzi − akár csak nagyságrendileg is – a közrefogásos lépés. Minden ellenőrzés aranyat ér! Ugyanis a napi munkában valószínűtlen, hogy valaki majd megmondja nekünk a helyes ered - ményt. Ahhoz neki is valami hasonló utat kell bejárnia.

M3. Nem került szóba, hogy a donga - alakok közelítése mennyire megalapozott, fizikailag. Ehhez jól kellene ismernünk a fa hordógyártás technológiáját, melynek alapján fizikai modell(eke)t kellene alkotnunk, azzal alapozva meg a dongaválasztást. Ez még odébb van.

M4. Olvastuk, hogy a fa hordóknál fontos az egységnyi térfogatra jutó nedvesített fe - lület is; minél kisebb a hordó, annál nagyobb a fajlagos felülete, s annál intenzívebb a beoldódás – http://hu.wikipedia.org/wiki/P%C3%A1linkaf%C5%91z%C3%A9s .

M5. Eredményeinket dl - pontossággal adtuk meg; ez még értékes mennyiség lehet.

M6. Találtunk témánkban régebbi írásokat is, de ezek szövege ma már alig érthető; pl.: http://erdeszetilapok.oszk.hu/00054/pdf/EL_1923_12_251-261.pdf

M7. Magyarul meglepően kevés helyen találtunk témánkba vágó képleteket.
Főként kézikönyvekben, részletes levezetés nélkül, kivéve [2] - t.
Érdekes a 11. ábrán látható szöveg, melynek forrása:
http://www.gyogyszeresztortenet.hu/letolt/Gyakorlati_gyogyszereszet_1.pdf .

Igen gyakran előfordul, hogy egy hordó űrtartalmát számítással, hozzávetőleges értékkel kell kiszámítanunk. A hordónál meg kell mérni:

a) a hordónyíláson keresztül a legnagyobb belső átmérőt (a donga vastagságát bele nem számítva);

b) a hordó tetejének vagy fenekének sugarát (a donga vastagságát bele nem számítva) és

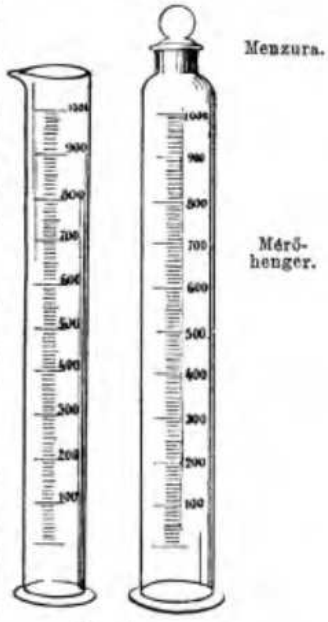
c) a hordó belső magasságát (a fenék és a tető vastagsága nélkül).

$$\text{Űrtartalom} = \left(\frac{D + S_1}{3}\right)^2 . \pi . m.$$

D = a hordó legnagyobb átmérője,
S_1 = a fenéksugár és
m = a magasság.

Az edények térfogatát, ha azok nem szabályosak és pontos mérésre nincs szükségünk, a kereskedelmi ürmértékkel, a literrel vagy annak törtrészeivel mérjük. Ezen ürmértékek, úgy mint a mérleg, hitelesítve kerülnek forgalomba. Ennek a gyógyszertári laboratóriumban lévő formája: *a mensura* (19. ábra.), ami vagy porcellánból, ónból, aluminiumból vagy üvegből készül és oldalán osztályzattal van ellátva. A leolvasás bizonytalansága és nehézkessége miatt ez az ürmérték csupán csak a víz hozzávetőleges térfogatának megmérésére használható. Pontosabb ürmértékünk a *mérőhenger* aminek két formája van általában a gyakorlatban: az egyik egy nyitott mércéshenger, a másik ugyanolyan, de szükített nyakkal és beköszörült üvegdugóval. (20. ábra.) Ezen eszközöknél a leolvasás már pontosabban történhetik, mert szűkebbek és eset-

19. ábra.



20. ábra.

Spergely Béla: Gyakorlati gyógyszerészet. 2

11. ábra

Az itt közölt képlet, a mi jelöléseinkkel:

$$V = \left(\frac{2 \cdot R + r}{3}\right)^2 \cdot \pi \cdot h \ , \qquad (\ 40\ )$$

Ez egy olyan *helyettesítő henger* térfogatát adja meg, melynek sugara a hordó középső és alsó / felső sugarainak súlyozott számtani átlaga.
Alkalmazzuk (40) - et, (A) - val! Ekkor kapjuk, hogy

$$V = \left(\frac{2 \cdot 1 + 3/4}{3}\right)^2 \cdot \pi \cdot 2\ \mathrm{m}^3 \ \cong 5{,}2796\ \ \mathrm{m}^3\ . \qquad (\ 40 / 1\ )$$

Ez nagyobb a koszinuszos térfogatnál, de kisebb a másik kettőnél. Egészen jó!
Továbbá egyszerűbb a (40) képlet alkalmazása, mint a fentebb levezetetteké.

M8. Megemlítjük, hogy a helyettesítő hengert gyakran alkalmazzuk a farönkök térfogatának közelítő meghatározására is, persze másfajta módon.

M9. A 11. ábrán mérőedényt is látunk, mellyel a gyakorlatban elegendő pontossággal meghatározhatjuk a hordóban lévő folyadék térfogatát.

M10. A [4] zsebkönyvben is a parabola dongájú hordó térfogat - számítási képletét adják meg, nem említve a donga alakját.
Az [5] zsebkönyvben is a körív dongájú hordó térfogatának számítására a következő közelítő képletet adják meg, a fenti jelölésekkel:

$$V_{kör} \approx \frac{\pi}{12} \cdot h \cdot \left(2 \cdot D^2 + d^2 \right) \ . \qquad (41)$$

Ez feltehetően úgy állt elő, hogy (39) - ben sorbafejtést és elhanyagolásokat alkal - maztak. Láttuk, hogy a körív - donga esetéhez tartozó térfogat a legnagyobb a fentiek közül, így az elhanyagolásokkal is használható térfogat - közelítést kaphatunk.
Nézzük meg, így van - e! (41) - re alkalmazva (A) - t:

$$V_{kör} \approx \frac{\pi}{12} \cdot 2 \cdot \left[2 \cdot 2^2 + \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right] \text{ m}^3 \cong 5,3669 \text{ m}^3 \ . \qquad (41/1)$$

Ez jóval nagyobb, mint az 5,3377 m^3 - es „pontos” érték! Hoppá! Ezt nem árt tudni!
A [6], [7] kézikönyvekben a (41) és a (43 / 2) szerinti képletek is szerepelnek, a donga - alak megadásával.

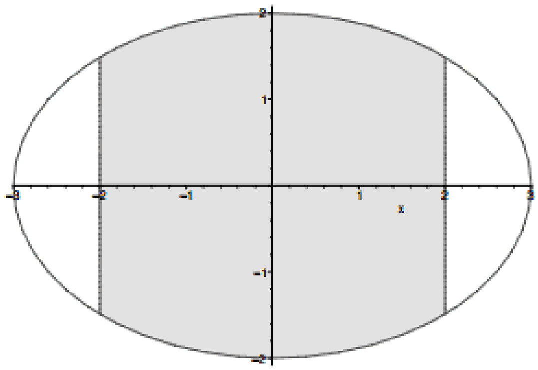
M11. A 12. ábra egy gönci hordót mutat.

Gönci hordó

forrás: http://vinopedia.hu/gonci-hordo

12. ábra

M12. Fentiek megírása után még nézelődtem egy keveset az interneten, és ismerős képletekre bukkantam, itt:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~klinker/Paper/Gauss_Klinker.pdf .
Innen származik a 13. ábra is.



13. ábra

Ez azért érdekes, mert megmutatják, hogy az ellipszis ívdarabnak a nagytengelye körüli megforgatásával előálló „hordótest” térfogatát a (41) képlet jobb oldala pontosan adja meg, azaz

$$V_{ell} = \frac{\pi}{12} \cdot h \cdot \left(2 \cdot D^2 + d^2 \right) \ . \qquad (41 / 2)$$

Ezt sem árt tudni! Ez azt is jelentheti, hogy a (41) képlettel kapcsolatos feltevésem helytelen: nem a kör - dongájú hordó „pontos” térfogat - képletének közelítő alakjá - val, hanem az ellipszis - dongájú hordó „pontos ” térfogat - képletének a kör dongájú hordóra való közelítő alkalmazásával van itt dolgunk.
A sugarakkal felírt (41 / 2) képletet egyébként a *Kepler - féle hordószabály*ként emlegetik.
Ezután ugyanitt levezetik a (39) képletünket – kicsit más alakban felírva – , majd bemutatnak egy összehasonlító táblázatot, a (39) és (41) képletekkel való számítás eredményeire. Végül megállapítják, hogy a körív - donga esetére a Kepler - szabályt alkalmazni nem alaptalan.
Mindezt azért részleteztük, mert örömünkre szolgál, hogy van olyan része e világnak, ahol ezekkel a mellékesnek tűnő kérdésekkel alaposabban foglalkoznak.

M13. *Johannes Kepler* (1571 ~ 1630), a híres német matematikus, csillagász és optikus talán kevésbé ismert műve ***A boroshordók új térfogatméréséről (1615)*** ;
ld.: http://hu.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler .
Nem véletlen, hogy eredménye itt is szóba került.

M14. Egy további közelítő képletet találhatunk a körív dongájú hordó térfogatára [3] - ban. Erről azonban könnyű kimutatni, hogy megegyezik (40) - nel.

Az eredmények összefoglalása

A hordódonga - alakok egyenlete:

$$\left.\begin{aligned}
&y_{\cos}(x) = r + (R-r)\cdot\cos\left(\pi\cdot\frac{x}{h}\right) \ ; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&y_{par}(x) = R - 4\cdot(R-r)\cdot\left(\frac{x}{h}\right)^2 \ ; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&y_{kör}(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2} - (\rho - R) \ , \\
&\rho = \frac{R-r}{2} + \frac{h^2}{8\cdot(R-r)} \ .
\end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

A hordótérfogatok képletei:

$$\left.\begin{aligned}
&V_{\cos} = \frac{h}{8}\cdot\left[(3\cdot\pi-8)\cdot d^2 + (8-2\cdot\pi)\cdot d\cdot D + \pi\cdot D^2\right] \ , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&V_{par} = \frac{\pi\cdot h}{15}\cdot\left[2\cdot D^2 + D\cdot d + \frac{3}{4}\cdot d^2\right] \ , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&V_{kör} = \pi\cdot h\cdot\rho^2\cdot\left\{1 + \left(1 - \frac{D}{2\cdot\rho}\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{2\cdot\rho}\right)^2 - \left(1 - \frac{D}{2\cdot\rho}\right)\cdot\left[\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\cdot\rho}\right)^2} + \frac{\arcsin\frac{h}{2\cdot\rho}}{\frac{h}{2\cdot\rho}}\right]\right\} \\
&\rho = \frac{D-d}{4} + \frac{h^2}{4\cdot(D-d)} \ .
\end{aligned}\right\}$$

(43)

Látjuk, hogy a parabola - közelítés eredményei az egyszerűbbek.

Végül megemlítem, hogy egy még sosem látott képletet is találtam – 14. ábra.
Forrása: http://erdeszetilapok.oszk.hu/01072/pdf/EL_1953_04_369-381.pdf

vételét is. A dongából készítendő hordó űrtartalma és a donga hossza között a következő összefüggés áll:

$$H_{hl} = \left(\frac{d_h}{63}\right)^3$$

ahol H_{hl} = a hordó űrtartalma hektoliterben, d_h = az oldaldonga hossza cm-ben és 63 = az 1 hl-es hordódonga hossza. Ebből az egyenletből könnyen kiszámítható, hogy pl. egy 8 hl-es hordó 1 hl-ének a dongájához fél annyi fatömegre van szükség, mint az 1 hl-es hordó dongájához. Ez az űrmértékre alapított képlet levezethető abból a tételből, hogy hasonló alakú testek térfogata úgy aránylik egymáshoz, mint a megfelelő oldalaknak a harmadik hatványai.

14. ábra

Remélem, áttekintésünk nem volt haszontalan!

Irodalom:

[1] – Szerk. ***Fazekas Ferenc***: Műszaki matematikai gyakorlatok A. V*.
Határozott integrál (Első rész)
Tankönyvkiadó, Budapest, 1973., 194. o.

[2] – ***Reiman István***: Matematika
Typotex, Budapest, 2011., 543. o.

[3] – ***I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev***: Matematikai zsebkönyv
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

[4] – Szerk. ***Fogarasi Mihály***: Mélyépítő művezetők és technikusok zsebkönyve
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1960., 48. o.

[5] – Szerk. ***Hir Alajos***: Építők zsebkönyve
4. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1980., 152. o.

[6] – Szerk. ***Palotás László***: Mérnöki kézikönyv I. kötet
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981., 76. o.

[7] – Szerk. ***Boldizsár Tibor***: Bányászati kézikönyv I. kötet
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1956., 46. o.

Összeállította: ***Galgóczi Gyula***
mérnöktanár

Sződliget, 2014. február 28.