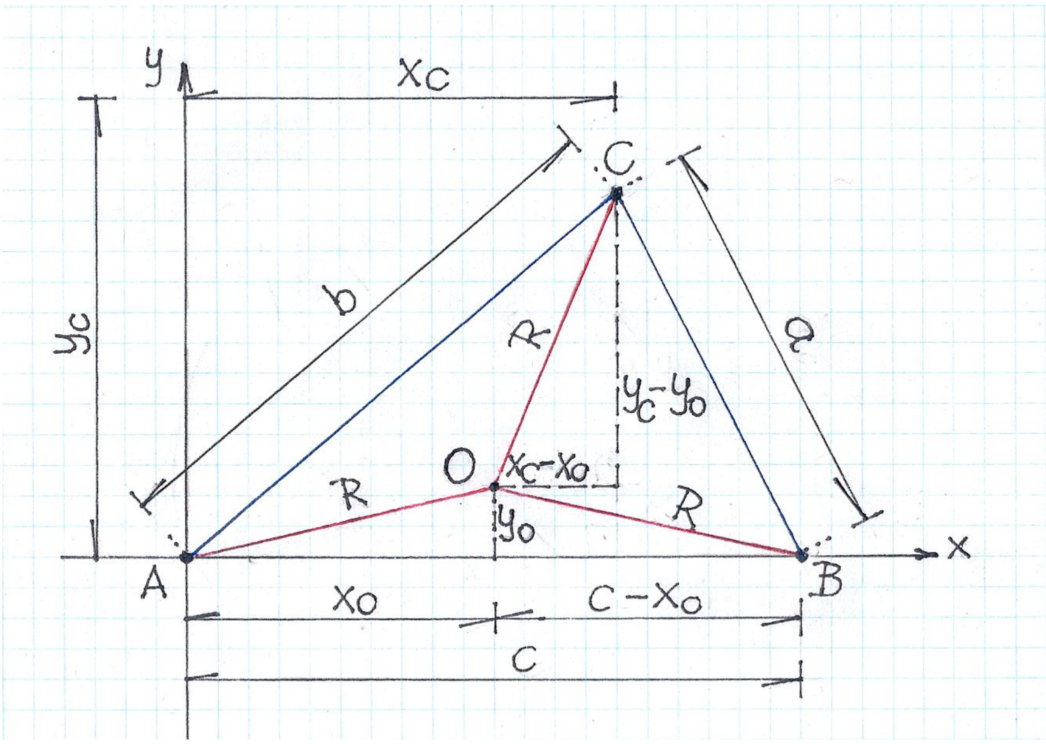
A háromszög köré írható kör középpontjának és sugarának meghatározása számítással – kicsit másként

Egy érdekes és egyszerűnek mondható megoldásra bukkantunk az [1] műben, ahol igazából csak a Pitagorász - tételt alkalmazták, meg némi algebrát. Minthogy ez a könyvecske nem sűrűn kerül – csak úgy – az Olvasó kezébe, ezért készült belőle ez az írás.

A feladat:
Adott az $\boldsymbol{ABC}$ háromszög.
Határozzuk meg a háromszög köré írt kör középpontját és sugarát!

Megoldás:
Ehhez tekintsük az 1. ábrát is!



1. ábra

Az ábra jelöléseivel:
Adott: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$;
Keresett: $\boldsymbol{x_O}, \boldsymbol{y_O}; \boldsymbol{R}$.

Középiskolai tanulmányaink alapján tudjuk, hogy a keresett eredményeket oldalfelező merőlegesek metszéspontjának előállításával kaphatjuk meg. Így készült az 1. ábra is, ahol $\boldsymbol{O}$: a keresett kör középpontja. A kört az ábrán nem tüntettük fel.
Itt a megoldás során nem használjuk ki az említett geometriai szerkesztést.

Ha ***a, b, c*** adott, akkor a ***C*** csúcs x_C, y_C koordinátái is ismertek. Ezek meghatározása az alábbi. Pitagorasz - tétellel és elemi algebrával:

$$\left.\begin{aligned} &x_C^2 + y_C^2 = b^2; \\ &(c - x_C)^2 + y_C^2 = a^2. \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$c^2 - 2\cdot c\cdot x_C + x_C^2 + y_C^2 = a^2;$$

$$c^2 - 2\cdot c\cdot x_C + b^2 - a^2 = 0;$$

$$c^2 + b^2 - a^2 = 2\cdot c\cdot x_C;$$

$$\underline{x_C = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2\cdot c}.} \qquad (1)$$

$$\underline{y_C = \sqrt{b^2 - x_C^2}.} \qquad (2)$$

Ha 3 ismeretlenünk van, akkor meghatározásukra 3 egyenletet kell felírnunk:

$$\left.\begin{aligned} &x_O^2 + y_O^2 = R^2; \\ &(c - x_O)^2 + y_O^2 = R^2; \\ &(x_C - x_O)^2 + (y_C - y_O)^2 = R^2. \end{aligned}\right\} \qquad (E)$$

Az első és második egyenletből:

$$\underline{\underline{x_O = \frac{c}{2}.}} \qquad (3)$$

A harmadik egyenletből:

$$x_C^2 - 2\cdot x_C\cdot x_O + x_O^2 + y_C^2 - 2\cdot y_C\cdot y_O + y_O^2 = R^2;$$

$$x_C^2 - 2\cdot x_C\cdot x_O + y_C^2 - 2\cdot y_C\cdot y_O = R^2 - x_O^2 - y_O^2;$$

az első egyenlettel is:

$$x_C^2 + y_C^2 - 2\cdot x_C\cdot x_O - 2\cdot y_C\cdot y_O = 0. \qquad (a)$$

Az 1. ábra szerint:

$$x_C^2 + y_C^2 = b^2, \qquad (b)$$

így (a), (b) és (3) - mal is:

$$b^2 - c\cdot x_C = 2\cdot y_C\cdot y_O,$$

innen:

$$\underline{\underline{y_O = \frac{b^2 - c\cdot x_C}{2\cdot y_C}.}} \qquad (4)$$

Bár az (1), (2), (3), (4) és (E / 1) képletek már a feladat megoldását adják, érdemes még átalakításokat végezni rajtuk.

~ (4) és (2) - vel:

$$y_O = \frac{b^2 - c \cdot x_C}{2 \cdot \sqrt{b^2 - x_C^2}}; \qquad (c)$$

~ (E / 1), (3), (c) képletekkel:

$$R^2 = x_O^2 + y_O^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b^2 - c \cdot x_C}{2 \cdot \sqrt{b^2 - x_C^2}}\right)^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{\left(b^2 - c \cdot x_C\right)^2}{4 \cdot \left(b^2 - x_C^2\right)} =$$

$$= \frac{c^2 \cdot \left(b^2 - x_C^2\right) + \left(b^2 - c \cdot x_C\right)^2}{4 \cdot \left(b^2 - x_C^2\right)} = \frac{c^2 \cdot b^2 - c^2 \cdot x_C^2 + b^4 - 2 \cdot c \cdot x_C \cdot b^2 + c^2 \cdot x_C^2}{4 \cdot \left(b^2 - x_C^2\right)} =$$

$$= \frac{c^2 \cdot b^2 + b^4 - 2 \cdot c \cdot x_C \cdot b^2}{4 \cdot \left(b^2 - x_C^2\right)} = \frac{b^2 \cdot \left(b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot x_C\right)}{4 \cdot \left(b^2 - x_C^2\right)}; \qquad (d)$$

~ most (1) - gyel is:

$$b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot x_C = b^2 + c^2 - \left(c^2 + b^2 - a^2\right) = a^2, \qquad (e)$$

majd (2), (d) és (e) - vel:

$$R^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{4 \cdot y_C^2},$$

innen:

$$\underline{R = \frac{a \cdot b}{2 \cdot y_C}.} \qquad (5)$$

~ Bővítsük a törtet ***c*** - vel!

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot c \cdot y_C}; \qquad (f)$$

minthogy a háromszög ***T*** területére fennáll, hogy

$$2 \cdot T = c \cdot y_C, \qquad (g)$$

így (f) és (g) - vel:

$$\underline{\underline{R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot T}.}} \qquad (6)$$

A (6) képlet - alakkal a szakirodalomban gyakran találkozhatunk – ld.: [2], [3]!

A háromszög területe ***a, b, c*** - ből Héron képletével adódik – ld.: [2], [3], [4]!

Ez a feladat azt is szemlélteti, hogyan lehet egy geometriai feladatot visszavezetni algebrai feladatra. Megjegyzendő azonban, hogy az itt bemutatott megoldás: egy lehetséges megoldás. A címbeli „kicsit másként” azt jelzi, hogy a szakirodalomban más megoldásokkal is találkozhat az érdeklődő Olvasó.
Külön felhívjuk a figyelmet az [5] munkára, ahol a térben adott 3 ponton átmenő kör középpontjának és sugarának meghatározása található, vektorszámítás alkalmazásával.

Irodalom:

[1] – J. M. Gelfand ~ E. G. Glagoljeva ~ A. A. Kirillov ~ E. E. Snol:
A koordináta - módszer
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.

[2] – Dezső Ágnes ~ Édes Zoltán ~ Sárkány Péter:
Középiskolai matematikai lexikon
Corvina, 1997.

[3] – Reiman István: A geometria és határterületei
Gondolat, Budapest, 1986.

[4] – Obádovics J. Gyula: Matematika
15. kiadás, Scolar Kiadó, Budapest, 1998.

[5] – I. D. Faux ~ M. J. Pratt: Computational Geometry for Design and Manifacture
Ellis Horwood Limited, Reprinted 1987.

Összeállította: Galgóczi Gyula
mérnöktanár

Sződliget, 2009. szeptember 24.