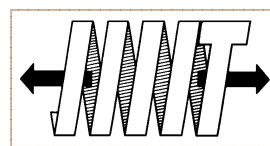




NYUGAT-MAGYARORSZÁGI EGYETEM
Faipari Mérnöki Kar



Műszaki Mechanika és
Tartószerkezetek Intézet

Dr. Hajdu Endre
egyetemi docens

MECHANIKA I.

Sopron
2009.
javított kiadás

TARTALOMJEGYZÉK

I.1. Bevezetés a műszaki mechanika tanulásába	1
I. A SZTATIKA ALAPJAI	
I.2. Vektorok I.	3
I.3. A sztatika alapfogalmai és alaptételei	7
I.4. Kényszerek	11
I.5. Közös metszéspontú síkbeli erőrendszer	17
I.6. Három erő egyensúlya	22
I.7. Az erő nyomatéka	23
I.8. Síkbeli párhuzamos erőrendszer	26
I.9. Síkbeli általános erőrendszer	32
I.10. A sztatikai feladatok megoldásáról	37
I.11. Egyensúlyozási feladatok	42
I.12. Vektorok II.	46
I.13. Nyomaték pontra és tengelyre	47
I.14. Térbeli általános erőrendszer	52
I.15. Megoszló erők	59
I.16. Súlypont	63
I.17. Tapadó és csúszó súrlódás	70
I.18. Csapsúrlódás, kötél súrlódás, gördülési ellenállás	76
I.19. Egyszerű gépek, fékszerkezetek	83
I.20. A nyugalmi helyzet stabilitása	94
II. TARTÓSZERKEZETEK SZTATIKÁJA	
II.1. A tartószerkezetekről általában	98
II.2. Egyszerű rácsos tartók	100
II.3. Csomóponti módszer, CREMONA-erőterv	103
II.4. Átmetsző módszer	109
II.5. Csuklós szerkezetek	111
II.6. Az egyenes rúd igénybevételei	114
II.7. Igénybevételi ábrák	120
II.8. Kapcsolat a hajlítónyomaték, a nyíróerő és a terhelés között	126
II.9. Tört-tengelyű és ágas tartók	131

I.1. Bevezetés a műszaki mechanika tanulásába

A TÁRGY SZEREPE

A műszaki mechanika a mérnökképzésnek - tehát a faipari mérnökképzésnek is – fontos alaptárgya. Részben erre épül minden műszaki jellegű szaktárgy, s az üzemmérnök mindennapi tevékenységében is termékenyítő a mechanika tanulása révén kialakuló szemlélet. Említést érdemel a tárgy elmefejlesztő, gondolkodást fegyelmező hatása is.

HOGYAN TANULJUK A TÁRGYAT?

Ez lényeges kérdés. Sokak számára azért eredménytelen a mechanika tanulására fordított – gyakran tetemes – idő, mert a gépies tanulás módszerét alkalmazzák az értelmes tanulás helyett.

A tanulásnak aktívnak kell lennie! Ha csak olvasgatjuk, nézegetjük az anyagot, önálló szellemi erőfeszítés nélkül, aligha tanulunk belőle valamit. Lassan, de elmélyedve kell tanulmányozni az új ismereteket, összekapcsolva a korábbi, már megemésztett anyaggal. A fogalmak definíciók megértésére és a tételek pontos ismeretére törekedjünk először.

Tudásunkat állandóan ellenőrizzük és fejlesszük feladatok megoldásával. A feladatmegoldás lépéseit logikailag (tételekre hivatkozva) kell indokolni, nem csupán a szemléletre alapozva.

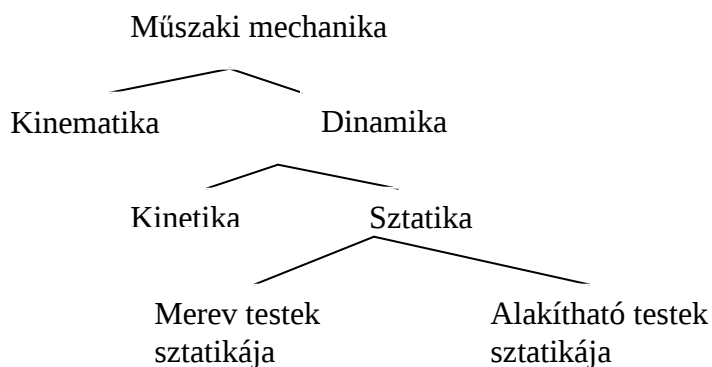
A JEGYZETRŐL

A jegyzet anyaga fejezetekre és tárgypontokra tagolódik. Az utóbbiak közül egyesek matematikai témákkal foglalkoznak. Ezek előkészítik az utánuk következő mechanikai anyagot, röviden összefoglalják az alkalmazásra kerülő matematikai apparátust. Ne haladjunk tovább, míg a megfelelő matematikai ismereteket fel nem frissítettük!

Az új fogalmak a jegyzetben alá vannak húzva, mégpedig azon a helyen, ahol a fogalom definiálva van. Az egyes tárgypontokat olykor megjegyzéseket, tanulástechnikai tanácsok zárják le.

ÁTTEKINTÉS A MŰSZAKI MECHANIKÁRÓL

Mielőtt a részletek megismeréséhez fognánk, vessünk egy pillantást az anyag egészére. Tárgyunk több szempontból osztható fel. Egy lehetséges és számunkra megfelelő felosztás a következő:



Magyarázat:

Műszaki mechanika: a mechanikának a műszaki szempontból fontos kérdéseivel foglalkozó része.

Kinematika: a mozgásoknak térben és időben való leírásával foglalkozik. Lényegében a mozgás geometriája, de az idő figyelembevételével.

Dinamika: az erők hatása alatt álló, mozgásban vagy nyugalomban lévő testekkel foglalkozik.

Kinetika: az erők hatása alatt álló, mozgásban lévő testeket vizsgálja.

Sztatika: a testek nyugalmi állapotával, az erők egyensúlyával és mindezek feltételeivel, illetve okaival foglalkozik.

Sztatikán többnyire a merev testek sztatikáját értik. Az alakítható testek sztatikájának szokásos neve: szilárdságtan, illetve rugalmasságtan. Megjegyezzük, hogy a műszaki mechanika e nagy fejezetei nem választhatók élesen el egymástól.

A továbbiakban gyakran lesz szükségünk a mechanikai mennyiségek vektorral történő szemléltetésére, leírására. Ezért a tárgyalást a vektorral kapcsolatos néhány alapvető tudnivaló rövid összefoglalásával kezdjük.

I.2. Vektorok I.

ALAPFOGALMAK

A vektor irányított egyenes szakasz. Az **A** kezdőpontú és **B** $\vec{c}$ vektor* (1. ábra) hossza vagy abszolút értéke:

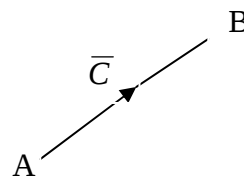
$$|\vec{c}| = \overline{AB}.$$

Az egységvektor egységnyi hosszúságú vektor.

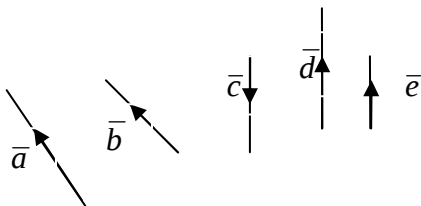
Két vektor egyenlő. Ha hosszuk és irányuk egyezik.

A 2. ábrán $\vec{a}, \vec{b}$ egyirányú vektorok,

$\vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ egyállásúak



1. ábra



2. ábra

A zérusvektor kezdőpontja és végpontja egybeesik.

* A szövegben és az ábrákon a vektorokat felülvonással jelöljük.

Vektornak egy k skalárral való szorzatát így definiáljuk: az $\vec{a}$ vektor és k skalár szorzata $k\vec{a}$ olyan vektor, melynek

- hossza: $|k| \cdot |\vec{a}|$
- iránya: egyező $\vec{a}$ irányával, ha k pozitív.

Egy vektor -1 - szerese a vektor ellentétes vektora.

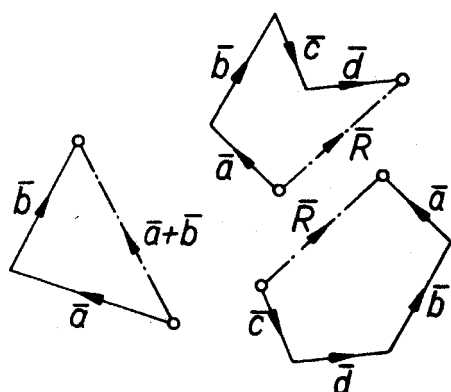
E két vektor hossza egyenlő, iránya ellenkező.

Műveleti szabályok:

$$(k + n)\vec{a} = k\vec{a} + n\vec{a},$$

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}.$$

Két vektor összegéhez jutunk, ha: a vektorokat úgy helyezzük el, hogy az egyik végpontja a Vektorközéppontja és a második végpontja által másikkal a kezdőpontja legyen. Ekkor az első meghatározott vektor (3. ábra) a két vektor összege. Három, vagy több vektor összegét hasonló módon, a vektorokat egymáshoz fűzve állíthatjuk elő. Az összegvektor az első vektor kezdőpontjából az utolsó vektor végpontjába mutató vektor. Az összeadandó vektorokat tetszőleges sorrendben fűzhetjük egymáshoz. Vektorok összegét eredőnek, az összeg tagjait összetevőknek is mondjuk.



Két vektor különbségét a vektor skalárszorosa és a vektorösszeg fogalmának segítségével így képezzük:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

3. ábra

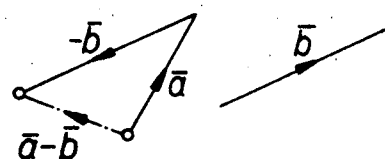
Vagyis a kivonandó vektor ellentétes vektorát adjuk a kisebbítendő vektorhoz (4. ábra).

A vektoroknak számokkal történő jellemzése céljából egy közös kezdőpontból kiinduló $\vec{i}, \vec{j}$ ($|\vec{i}| = 1, |\vec{j}| = 1$) egymásra merőleges alapvektorokat veszünk fel a síkban, illetve $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ alapvektorokat a térben. E vektorokat úgy választjuk, hogy jobbrendszert alkossanak, vagyis a vektorvégpontok alkotta háromszög körüljárása a kezdőpontból nézve pozitív (az óramutató járásával ellentétes) legyen.

Az alapvektorokat kapcsoljuk egy derékszögű koordináta-rendszerhez az 5. ábra szerint. Ekkor bármely síkbeli $\vec{c}$ vektor pontosan egy módon írható fel

$$\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j}$$

alakban. Az $\vec{i}, \vec{j}$ alapvektorok rendszerében



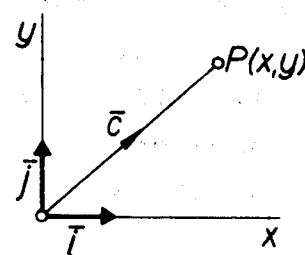
4. ábra

c_x, c_y : a $\vec{c}$ vektor komponensei

$c_x \vec{i}, c_y \vec{j}$: a $\vec{c}$ vektor összetevői

Az 5. ábrán látható $\vec{c}$ vektor esetében

$$c_x = x, \quad c_y = y$$



5. ábra

Térbeli vektorokra a komponens és összetevő értelmezése hasonló.

Tétel: vektorok összegének komponensei a vektorok megfelelő komponenseinek összegei.

Tétel: egy vektor $\mathbf{k}$ - szorosának komponensei a vektor megfelelő komponenseinek $\mathbf{k}$ - szorosai.

Valamely $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$ térbeli vektor abszolút értéke:

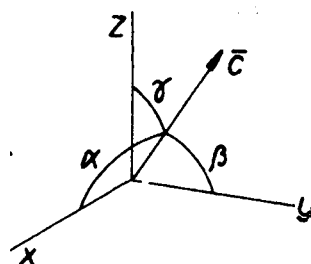
$$|\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}.$$

A vektornak a tengellyel bezárt szögeit (6. ábra), pontosabban iránykoszinuszait így számítjuk:

$$\cos \alpha = \frac{c_x}{|\vec{c}|}, \quad \cos \beta = \frac{c_y}{|\vec{c}|}, \quad \cos \gamma = \frac{c_z}{|\vec{c}|}.$$

E három iránykoszinusz nem független egymástól, fennáll a következő reláció:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$



6. ábra

A síkban minden vektort két, a térben három adat jellemez. Ennek megfelelően minden vektoregyenlet két, illetve három skaláregyenletnek felel meg.

MECHANIKAI VEKTORMENNYISÉGEK

A mechanikában több, vektorokkal jellemezhető mennyiség szerepel. Ezek között szerepelnek olyanok is, melyeknél a fizikai hatás szempontjából a kezdőpont helyzete lényeges. Az ilyen vektormennyiséget kötött vektorokkal adhatjuk meg. Ha a kezdőpont áthelyezése a fizikai jelenséget nem érinti, szabad vektorról beszélünk.

Azok a fizikai mennyiségek, melyek ugyan irányított egyenes szakaszokkal jellemezhetők, de nem a vektoriális összeadás szabályai szerint adhatók össze, nem vektormennyiségek.

Dimenzió szempontjából a vektorok és komponenseik nem hosszúságjellegűek, hanem a megfelelő mechanikai mennyiség dimenziójával bírnak.

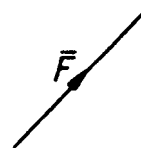
VEKTORMENNYISÉGEK ÁBRÁZOLÁSA

A műszaki mechanikában gyakran szükség van a vektormennyiségek grafikus ábrázolására. Ez egy nyíllal ellátott egyenes szakasz és egy alkalmas mérték (rajzmérték, lépték) felvételével történhet. A nyíl jelöli a vektormennyiség irányát, a mérték alapján pedig az ábrázolt vektormennyiség abszolút értéke határozható meg.

A mérték lényegében olyan- rendszerint numerikus vagy grafikus- utasítás, mely megmutatja, a rajzban ábrázolt egységnyi vektorhossz mekkora és milyen mértékegységű mechanikai mennyiséggel egyenértékű. A 7. ábrán egy erővektor látható. A két módon is megadott mérték alapján az erő nagysága $|\vec{F}| = F = 2,8N$.

Az egyenértékűség jele $\doteq$.

$1cm \doteq 1N$ vagy $\xrightarrow{1N}$



7. ábra

I.3. A sztatika alapfogalmai és alaptételei ALAPFOGALMAK

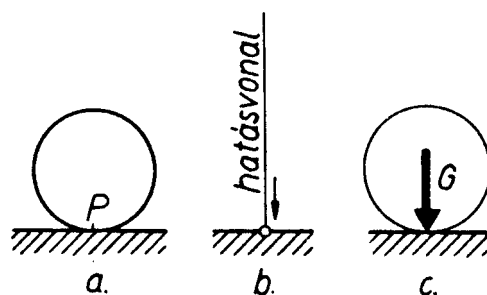
A sztatika tárgyalásánál bizonyos alapfogalmakból indulunk ki, melyeket nem definiálunk, hanem szemléletből, illetve korábbi tanulmányainkból ismertnek tekintünk. Ilyen alapfogalom a tér, melyre az euklideszi tér matematikáját tekintjük érvényesnek.

Ugyancsak nem vizsgáljuk –egyenlőre- hogy mit értünk időn és mozgáson.

A térbeli és időbeli mennyiségek jellemzése, s egyéb, a mechanikában előforduló mennyiségek méréséhez mértékrendszert kell felvenni. A továbbiakban kizárólag a Nemzetközi Mértékegységrendszert (SI: Systeme International Unites) illetve az MSZ 4900-as szabványsorozatban rögzített mértékegységeket alkalmazzuk. A nemzetközi mértékegységrendszer mechanikai mértékegységei: a méter (m), a másodperc (s) és a kilogramm (kg). A térben foglalnak helyet az anyagi testek. A sztatikában főként merev testekkel foglalkozunk, melyek jellemzője: a test pontjai egymástól változatlan távolságban maradnak. Egyelőre sima felületekkel határolt testekről lesz szó. A testek egymásra gyakorolt hatása az erő. Az erő egysége az 1 newton, jele N, mértékegysége $kg \cdot m \cdot s^{-2}$, hozzávetőleg az egységnyi tömegre ható súlyerő tized része.

A testek egymásra gyakorolt hatása gyakran a testek érintkezése útján adódik át. Például két test, hatásfelületük kisebb-nagyobb darabján egymáshoz ér. Ha a felületdarab kicsiny, felszínét elhanyagolva egy ponton érvényesülőnek tekintjük a hatást, koncentrált erőről beszélünk. Az a pont, melyben a hatás fellép, az erő támadáspontja.

Az elmondottakat a 8. ábra szemlélteti. Egy vízszintes támaszfelületre súlyos gömböt helyezünk. A két test (a gömb és a támasz) a valóságban egy kicsiny, nagyjából gömbszelet alakú felületen érintkezik egymással. Ha ez a felület vizsgálatunk szempontjából elhanyagolható méretű, a gömb által a támaszra gyakorolt hatást a **P** pontban koncentrálnak tekintjük.



8. ábra

Rendszerint megadható egy, a támadásponton átmenő egyenes- az erő hatásvonala- és azon egy irány, az erő iránya, mely a hatás pontosabb jellemzésére szolgál (8/b ábra).

Arról az egyenesről és irányról van szó, melyen az erő hatása alatt álló (pontoszerű) test gyorsulva mozog, ha az erő egyedül hatna. A 8/c ábra az erő jelképes ábrázolását mutatja. Az aljzatot érő hatást pontosan jellemezhetjük a támadáspont rajzolt erőjelképpel is. Ez egy

betűvel vagy számértékkel ellátott nyíl, mely a hatás irányát és nagyságát mutatja. Nem tévesztendő össze az erő vektoros ábrázolásával.

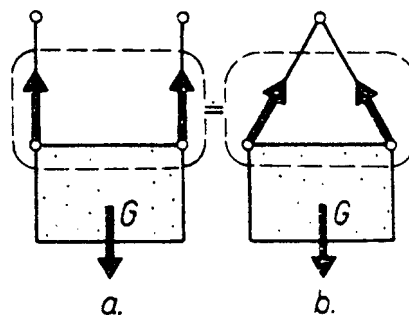
Mechanikai szempontból rendszerint felesleges az egymásra hatást gyakorló testeket feltüntetni, elegendő csupán a kérdéses testet érő hatásokat egy-egy erőjelképpel helyettesíteni. Nem mindig alkalmazható a koncentrált erő absztrakciója.

Olykor a hatás egy test összes pontján érvényesül. Ilyenkor tömegerőről, vagy térfogati erőről beszélünk. Példa a testek súlya. Az ilyen megoszló erőkről később lesz szó. A tapasztalat azt mutatja, hogy az erők hatása alatt álló testek bizonyos esetekben mozgásban vannak, más esetekben tartósan nyugalomban, illetve egyenes vonalú egyenletes mozgásban. A sztatika számára ez a két utóbbi eset fontos. Ha egy erőrendszer hatása alatt álló test tartósan nyugalomban marad, vagy pontjai egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek, azt mondjuk, hogy a test egyensúlyban van, illetve a rá ható erőrendszer egyensúlyi erőrendszer.

Egyensúlyi erőrendszer a zéruserő is, mely zérusvektorral „ábrázolható”. Az egyensúly különböző erőrendszerekkel valósítja meg. Például a 9. ábrán látható tárgy egyensúlya két módon valósul meg: az **a.** ábrán a tárgy G súlya és a függőleges vonalerők alkotnak egyensúlyi erőrendszert. A **b.** ábrán a ferde vonalerők tartanak G -vel egyensúlyt.

A függőleges vonalerők rendszere egyenértékű a ferde helyzetű fonálerők rendszerével. Általánosságban két erőrendszert sztatikailag egyenértékűnek nevezünk, ha létezik olyan erőrendszer, mely a két erőrendszer mindegyikével egyensúlyi erőrendszert alkot.

Példánkban ilyen harmadik erőrendszer a G súlyerő.



9. ábra

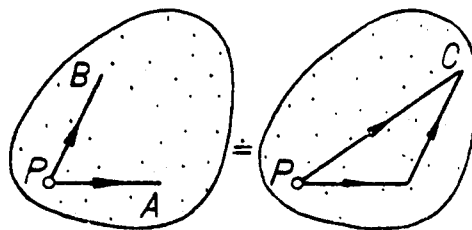
A sztatika tételeit néhány –a tapasztalat által igazolt- alaptételre, a sztatika axiómáira fogjuk visszavezetni. Ezeket az alaptételeket nem bizonyítjuk, helyességükre a rájuk épülő tételek és tapasztalat egyezéséből következtetünk.

AXIÓMÁK

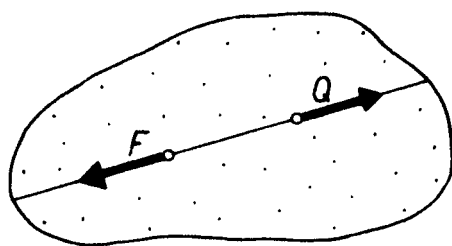
I. Ha egy test valamely P pontja két erő közös támadáspontja, s az erők nagyságát és irányát a $\vec{PA}$, $\vec{PB}$ irányított egyenes szakaszok ábrázolják, akkor a két erő sztatikailag egyenértékű egy olyan erővel, melynek támadáspontja P , és melyet a $\vec{PA}$, $\vec{PB}$ irányított egyenes szakaszok egymáshoz fűzésével nyert $\vec{PC}$ szakasz ábrázol (10. ábra).

Az erőkre tehát a vektoriális összegzés szabálya érvényes, az erő vektormennyiség, beszélhetünk ezért összetevő és eredő erőről.

II. Két erő egyensúlyának szükséges és elégséges feltétele az, hogy a két erő közös hatásvonalú legyen, - az erők vektorai egymás ellentétes vektorai legyenek.



10. ábra



$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}, \quad \bar{\mathbf{F}} = -\bar{\mathbf{Q}}.$$

11. ábra

A II. axiómában szereplő erőrendszer (a zéruserőt nem számítva).

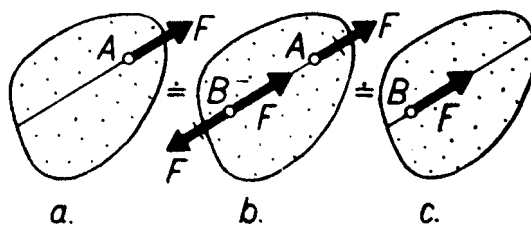
Megjegyzés a 11. ábrához: különböztessük meg az erő jelképe mellé írt betűt (F, Q) , mely az erő nagyságát illetve az erőt ábrázoló vektor hosszát jelenti, az erő vektorának jelétől $(\mathbf{F}, \mathbf{Q})$.

III: Merev testre ható erőrendszer hatása nem változik, ha egy egyensúlyi erőrendszert adunk hozzá, vagy távolítunk el belőle.

Következmény: a merev testre ható erő hatásvonalán eltolható.

Bizonyítás: a 12/a. ábrán látható $\mathbf{F}$ erőhöz hozzáadjuk az $\bar{\mathbf{F}}, -\bar{\mathbf{F}}$ vektorú, $\mathbf{B}$ támadáspontú erőket. Ezt a II. és III. axióma teszi lehetővé. Ezután –ugyan –csak III. alapján- a b. ábra erőrendszeréből eltávolítjuk az ábrán áthúzással jelölt, egyensúlyi erőrendszert. A megmaradt $\mathbf{B}$ támadáspontú $\mathbf{F}$ erő egyenértékű az eredetileg adott $\mathbf{A}$ támadáspontú erővel, mindkettő vektora $\bar{\mathbf{F}}$.

IV. (Akció – reakció – elv)



12. ábra

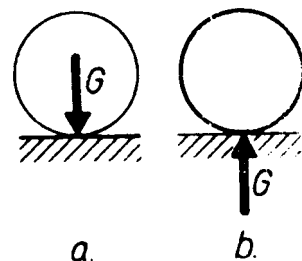
Ha az $\mathbf{A}$ test hatása a $\mathbf{B}$ testre az F_{AB} erő és $\mathbf{B}$ test hatása $\mathbf{A}$ –ra az F_{BA} erő, akkor

$$\bar{\mathbf{F}}_{AB} = -\bar{\mathbf{F}}_{BA}.$$

Az erők tehát párosával jelentkeznek. Feltesszük, hogy hatásvonaluk azonos. A 8. ábrán megrajzolt gömböt és támaszt még egyszer szemlélteti a 13. ábra.

Az a. ábra a gömb hatását mutatja a támaszra, a b. ábra a támasz hatását a gömbre.

Az akció és a reakció általában két különböző testre hat, vagy ugyanazon test, különböző részére. Ez utóbbira példa egy végeivel összeakasztott rugó.



13. ábra

MEGJEGYZÉS

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az I. II. és IV. axióma deformálható testekre is érvényes. A III. axióma alkalmazása nem merev testek esetében tévedésre vezethet.

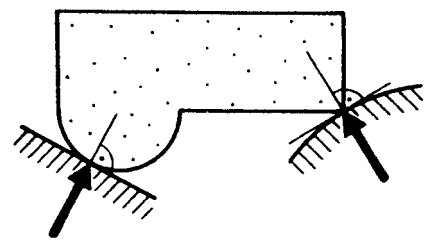
I. 4. Kényszerek

Általában az erők hatása álló test közvetve vagy közvetlenül a földre támaszkodik, valamilyen módon a talajhoz kapcsolódik. A nyugalmi helyzet biztosítása csuklókkal, rudakkal, támasztó felületekkel stb. történhet. A testre ható adott, ismert aktív erőkön kívül az előbb említett, mozgást korlátozó kényszerek is erőt gyakorolnak. A kényszerek által gyakorolt erők a reakciók. Ezek rendszerint nem adottak. Mindazt kényszernek mondjuk, ami a test elmozdítását korlátozza. A valóságban igen sokféle módon valósul meg a mozgás korlátozása. Ha azonban a kényszerek fizikai megvalósításában jelentkező esetlegességektől eltekintünk, és csak arra ügyelünk, hogy milyen típusú reakció – erőrendszert szolgáltat a kényszer, akkor elég kisszámú kényszerfajta-hoz jutunk. Az alapvető kényszereket az alábbiakban soroljuk fel.

TÁMASZTÁS

A test elmozdulását akadályozhatja az, hogy a kérdéses test egy másik –rögzített- testtel érintkezik. Ez az utóbbi a támasztás vagy támasz, az előbbi a támasztott test. Feltesszük, hogy az érintkezés egy-egy ponton létesül (14. ábra).

Sima határoló felületeket tételezünk fel, ami azt jelenti, hogy a felületek az egymáson történő elcsúsztatás ellen nem fejtenek ki ellenállást. A megtámasztott test a támasztól természetesen el is távolítható, csupán olyan mozgás van kizárva, melynél a támasztott test érintkezési pontja a támasztás belsejébe jut. A sima felülettel határolt támasztás lényege sztatikai szempontból egy olyan reakcióerő, melynek



14. ábra

- támasztáspontja a támasztási pont,
- hatásvonala a határoló felületek normálisa a támasztáspontban,
- vektora a támasztott test felé mutat.
-

A vektor hosszáról közelebbit csak a támasztott testre ható erőrendszer ismeretében mondhatjuk.

KÖTÉL

A testek rögzítése kötéllal (fonállal) is biztosítható. Ideális kötélre gondolunk a következőkben, mely

- tökéletesen hajlékony,
- nyújthatatlan,
- súlytalan.

Ha a test egy **P** pontját kötéllal rögzítjük egy fix **O** ponthoz (15. ábra), akkor a **P** pont az **O**-tól legfeljebb kötélhossznyi távolságra kerülhet. Mivel rögzítő feladatra a kötél csak megfeszített állapotban alkalmas, mondhatjuk, hogy a test kötélhez kapcsolt pontja egy **O** középpontú gömbfelületen tartózkodhat.

Tapasztalatunk szerint a feszített állapotban lévő kötél olyan reakciót gyakorol a testre, melynek

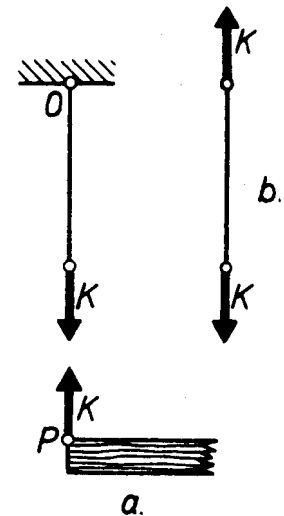
- támaszpontja a test rögzítési pontja,
- hatásvonala azonos a kötél tengelyvonalával,
- vektora a testtől a kötél felé mutat.

A vektor hosszáról közelebbit csak a testre ható erőrendszer ismeretében mondhatunk.

A fentieket a 15/a ábra szemlélteti. Egy gerenda egyik végét kötéllal kapcsoljuk a mennyezethez, s az erők jobb áttekinthetése céljából a gerendavéget a kötélről elkülönítve ábrázoljuk. A gerendavég **P** pontjában ható **K** erő a kötélvég hatása a gerendára. Az akció-

reakció elv értelmében ugyanakkora, de ellentétes irányú erő hat a kötélvégre is, ez a gerenda hatása kötélvégre. A 15/b ábra a kötél nyugalmi helyzetét biztosító erőrendszert szemlélteti: a kötél végén ható erők egyensúlyi erőrendszert alkotnak, s a kötelet húzásra veszik igénybe. Ez mindig így van, nyomóerő felvételére a kötél nem alkalmas.

Kötélrőn a kötél hatását jelentő reakciót értjük. A kötél jelképes ábrázolása folytonos vonalszakasszal és azt lezáró nullkörökkel történik. Az utóbbiak csuklós végkiképzést, illetve pontszerű erőátadást jeleznek (15. ábra).



15. ábra

CSUKLÓ

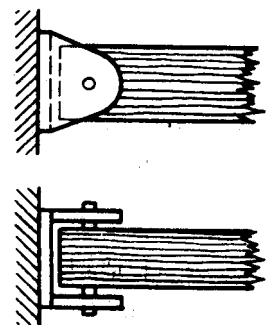
Az eddig látott kényszerek a test egyetlen pontjának mozgására jelentettek megkötést. Az egész test mozgására jelent korlátozást, ha a testet a 16. ábrán látható módon rögzítjük: a test alkalmasan kialakított részén furatot készítünk, s azon hengeres csapszeget tolunk át. A csapszeg szabad végei az aljzat megfelelően kialakított részének furataiba illeszkednek.

A csapból és a csapágyból álló szerkezet a csukló.

A csukló a testnek egyetlen mozgáslehetőséget hagy meg: a test szabadon elfordulhat a csap tengelye körül. A testnek a csap tengelyével párhuzamos eltolódása rendszerint gátolva van.

A csap átmérője valamivel kisebb a furaténál. A közöttük átadódó erő valójában egy keskeny hengerfelület-darabon hat.

A valóságos viszonyokat megint egy kissé idealizálva feltesszük, hogy a csap által a testre gyakorolt reakcióerő egyetlen hengeralkotón érvényesül.



16. ábra

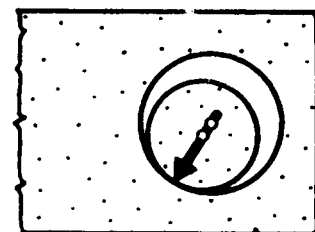
Ha egyszerűség kedvéért síkbeli képen szemléltetjük a valóság térbeli viszonyokat (17. ábra), azt mondhatjuk, hogy a csuklós megfogás olyan reakcióerőt biztosít, melynek

- támadáspontja a csap és a furat érintkezési pontja,
- hatásvonala átmegy a csap (és a furat) középpontján.

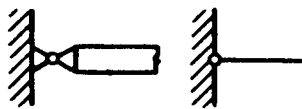
Valóban: a testre vonatkozólag a csap támasztást jelent, a támasztóerő merőleges a közös érintősíkra, tehát áthalad az említett középpontokon.

A reakcióerő vektorának hosszáról, állásáról és irányáról közelebbit, csak a testre ható erőrendszer ismeretében mondhatunk.

A 16. ábrán részletesen ábrázolt kapcsolat jelképes ábrázolására két lehetséges módot mutat be a 18. ábra.



17. ábra



18. ábra

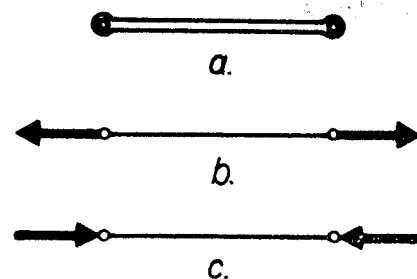
RÚD

Gyakori rögzítőelem a rendszerint súlytalannak tekintett, végein csuklós megfogásra alkalmasan kialakított rúd (19. ábra).

Ha a rúd csak a végein – a csapszegek közvetítésével – kapcsolódik más testekhez, akkor a rúdvégekre ható erők eredői által alkotott egyensúlyi erőrendszereket a 19/b, c ábrák szemléltetik.

A II. axióma értelmében ugyanis a rúdvégekre ható két erő egyensúlyának szükséges feltétele, hogy közös hatásvonalon, vagyis a rúdtengelyen működjenek. A 19/b ábra húzott, a 19/c ábra nyomott rudat szemléltet. A fentiek és az akció-reakció elv alapján belátható, hogy a rúd, mint kényszer olyan reakciót jelent, melynek

- hatásvonala egybeesik a rúdtengellyel,
- iránya a test vagy rúd felé mutat.



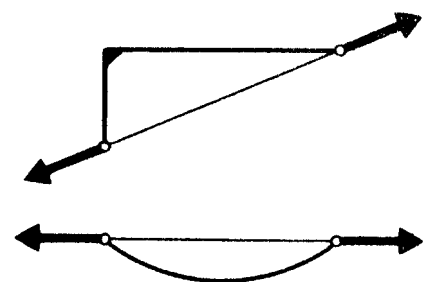
19. ábra

A reakcióerő nagyságáról közelebbit csak a testre ható erőrendszer ismeretében mondhatjuk. Gyakran tört-tengelyű, vagy görbe tengelyű rudakat alkalmazunk.

Az ezek által gyakorolt reakcióerő hatásvonala a csuklóközéppontok összekötő egyenese (20. ábra).

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az egyenes- és görbe tengelyű rúd, mint kényszer által biztosított reakció hatásvonaláról elmondottak csak akkor érvényesek, ha a rúd végeken (csuklóközéppontokon) kívül máshol nem hat erő a rúdra. Ha a rúdra máshol is hat erő, akkor már nem állíthatjuk, hogy a reakcióerő hatásvonala a csuklóközéppontok összekötő egyenese.

További kényszerekkel a későbbiekben foglalkozunk.



20. ábra

I. Példa

Egy vízszintes helyzetű, közepén F erővel terhelt rúd egyik (A) végét csuklóval kapcsoljuk egy falhoz, másik (B) végén pedig különböző kényszerekkel biztosítjuk a rúd nyugalmi helyzetét.

Feladat: állapítsuk meg a B rúdvégre ható reakcióerő irányát és vázoljuk a kényszerre ható erőt is, ha azt alkalmazott kényszerek:

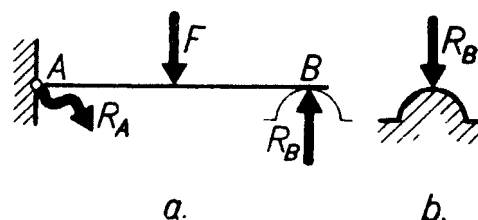
- a/ támasztás (21. ábra),
- b/ ferde helyzetű rúd (22. ábra),
- c/ tört-tengelyű rúd (23. ábra).

Megoldás

a/ A szemlélet alapján nyilvánvaló, hogy a rúd mozgását (A körüli elfordulását) az ábra szerint kialakított hengeres támasz képes megakadályozni. A támasz által gyakorolt R_B reakcióerő hatásvonala a támasztópontbeli érintőre merőleges, vagyis függőleges, s az erő a rúd felé irányul. Külön ábrázoltuk a reakcióerő ellenerejét, azaz a vízszintes rúdnak a támaszra gyakorolt hatását. E két erő közös R_B nagysága egyelőre ismeretlen.

Az A csuklónál ébredő reakcióról most csak annyit mondtunk, hogy hatásvonala az A ponton halad át egyéb adatairól közelebbit még nem állíthatunk. Az R_A erő irányának határozatlanságát azzal érzékeltettük, hogy hullámvonalas erőjelképpel ábrázoltuk.

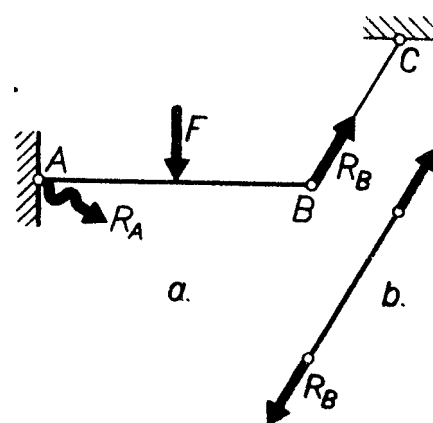
b/ A 22. ábrán látható rögzítésmód szintén alkalmas a nyugalmi helyzet biztosítására.



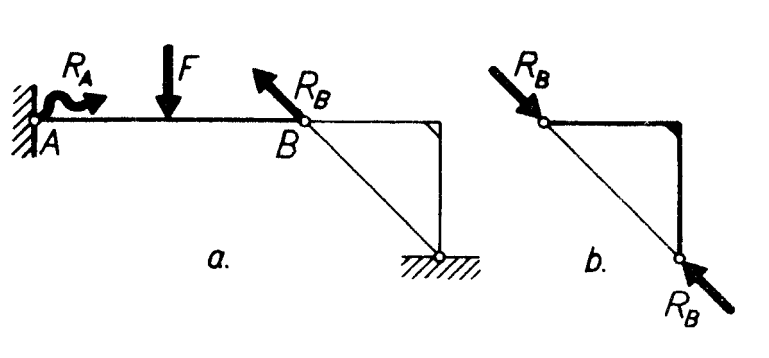
21. ábra

A ferde rúd csak végein kap terhelést, következésképpen a vízszintes rúdra ható R_B reakcióerő hatásvonala azonos a ferde rúd tengelyével. Az erő B, C irányú lehet csak, különben az AB rúd mozgásba jönne. Ezután már ábrázolható (22/b ábra) a ferde rúdra ható erőrendszer is.

c/ Néma geometriai megfontolást igényel annak belátása, hogy a 23. ábrán látható módon is biztosítható a rúd egyensúlya. Az R_B reakció hatásvonala abból a feltételből adódik, hogy a törttengelyű rúdnak csak a végein hatnak erők, tehát egyensúly esetén ezek közös hatásvonala a csuklóközéppontok összekötő egyenese.



22. ábra



23. ábra

A reakcióerő iránya hasonló megfontolással adódik, mint előbb.

MEGJEGYZÉS

A reakciók megállapításánál lényeges az alkalmazott kényszerek gondos vizsgálata. Csak annyit állíthatunk az egyes kényszerfajták által megszabott reakciókról, amennyit az egyes típusok bemutatása során általánosságban megállapítottunk. A kezdő gyakori hibája: „érzés” alapján jelöl be reakciókat. Például a 23. ábrán R_B -t vízszintesnek véli.

I.5. Közös metszéspontú síkbeli erőrendszer

ERŐRENDSZEREKKEL KAPCSOLATOS ALAPFELADATOK

Célunkat, a merev test egyensúlyi feltételeinek tisztázását oly módon fogjuk elérni, hogy egyre bonyolultabb erőrendszerek esetén vizsgáljuk meg az egyensúly feltételeit. A legegyszerűbb esetet – mikor két erő hat a testre – már elintéztük: a II. axióma mondja ki az egyensúly feltételét. Ha egy erőrendszer hatásvonalai egy síkban vannak, síkbeli erőrendszerről beszélünk. Egyelőre ilyenekkel foglalkozunk. Minden esetben két fontos kérdésre keresünk választ:

1/ milyen az a legegyszerűbb erőrendszer, mellyel az adott erőrendszer egyenértékű, vagyis mi az erőrendszer eredője?

2/ mi az erőrendszer egyensúlyának feltétele?

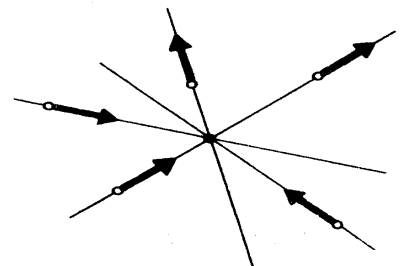
KÖZÖS METSZÉSPONTÚ SÍKBELI ERŐRENDSZER EREDŐJE

Ha egy erőrendszer erőinek hatásvonalai

- egy síkban vannak,
- egy pontban metsződnek.

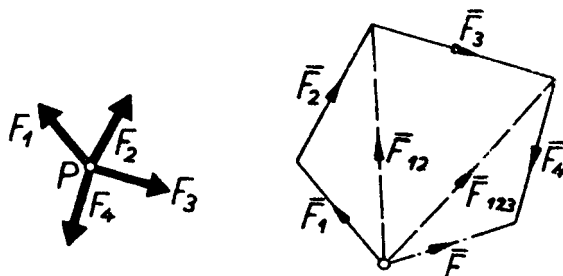
Közös metszéspontú síkbeli erőrendszerről beszélünk (24. ábra).

Könnyen belátható, hogy egy ilyen erőrendszer eredőjének meghatározása azonos egy közös támadáspontú erőrendszer eredő – meghatározásának feladatával. A közös metszéspontú erőrendszer erőit ugyanis eltolhatjuk a hatásvonalak mentén úgy, hogy az erők támadáspontja a hatásvonalak közös metszéspontja legyen. Az így nyert erőrendszer eredőjének meghatározását a 25. ábra mutatja be egy négy erőből álló, közös támadáspontú erőrendszeren.



24. ábra

Az F_1, F_2 erők eredője I. axióma értelmében az a P támadáspontú F_{12} erő, melynek vektora az $\vec{F}_1$ és $\vec{F}_2$ vektorok összege: $\vec{F}_{12}$. Az első két erőt az F_{12} részeredővel helyettesítve, már csak három erő eredőjét kell meghatározni. Eljárásunkat megismételve az F_{123} részeredőt kapjuk, majd ehhez F_4 -et adva, az eredeti erőrendszer F eredőjét.



25. ábra

Az összeadás közömbös, a módszer akárhány erőből álló erőrendszer esetén is alkalmazható. Az erő egyetlen erő, melynek

- támadáspontja: a hatásvonalak közös pontja,
- vektora: az összetevők vektorainak összegvektora.

Ez utóbbi zérusvektor is lehet.

Ha az eredő vektorát számítással akarjuk meghatározni, akkor először is alkalmas derékszögű koordináta-rendszert kell felvenni. Kezdőpontja célszerűen a hatásvonalak közös pontja, a tengelyeket úgy választjuk meg, hogy az erők irányszögei lehetőleg könnyen számíthatók legyenek. Az erő irányszöge vektorának az x tengellyel bezárt szöge.

Az eredő vektorának számítását az I. 2. tárgyponthan említettek alapján végezzük. Az eredő vektora $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$, komponensei az összetevő vektorok komponenseinek összegezésével számíthatók. A 26. ábra jelöléseivel:

$$F_x = \sum F_{ix} = \sum_1^n F_i \cos \alpha_i = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + \dots + F_n \cos \alpha_n,$$

$$F_y = \sum F_{iy} = \sum_1^n F_i \sin \alpha_i = F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 + \dots + F_n \sin \alpha_n.$$

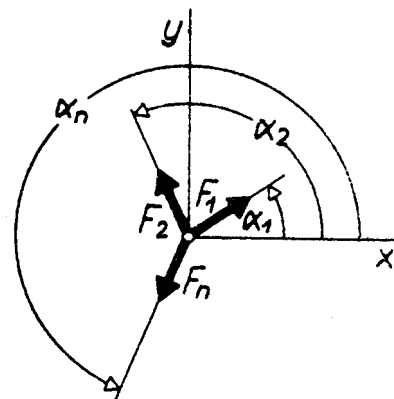
Az eredővektor hossza és irányszöge:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_y}{F_x}.$$

A komponensek számítására szolgáló egyenletek a komponensegyenletek vagy vetületi egyenletek. A komponensegyenleteket a rövidség kedvéért gyakran csak a bal oldalon szereplő tükör formában írjuk, nem tüntetjük fel az összegezés határait:

$$F_x = \sum F_{ix}.$$

26. ábra



Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az erő komponense, vagy vetülete Newton (N) mértékegységű mennyiség.

EGYENSÚLY

Előfordulhat, hogy a közös metszéspontú erőrendszer eredője zéruserő, vagyis a vektoriális összegezés zérusvektort eredményez. Ekkor a közös metszéspontú erőrendszer egyensúlyban van. Azt a tényt, hogy valamely $F_1, F_2, \dots, F_n$ erőkből álló erőrendszer egyensúlyi erőrendszer, illetve eredője zéruserő, így fogjuk jelölni:

$$(F_1, F_2, \dots, F_n) \doteq 0.$$

A közös metszéspontú síkbeli erőrendszer egyensúlyának szükséges és elégséges feltétele az, hogy az erők vektoriális összege zérus legyen. A feltétel grafikus és analitikus megfogalmazásban a következő.

$$\text{az erőrendszer vektorsokszöge zárt} \quad \sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0.$$

Az egyensúly analitikus feltételéhez megjegyezzük, hogy csak a két egyenlet együttes teljesülése biztosítja az egyensúlyt. Az egyensúly analitikus feltétele az erőrendszer síkjában felvett tetszőleges derékszögű koordináta-rendszerben érvényes. Valóban: ha az eredő zéruserő, tetszőleges koordinátatengelyre vonatkozólag a komponensek összege – vagyis az eredő komponense – zérus kell, hogy legyen.

Másképpen: ha a feltétel teljesül, vagyis egyidejűleg

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \text{ akkor más, mint zéruserő nem lehet az eredő.}$$

Tetszőleges erőrendszerhez meghatározható egy olyan legegyszerűbb másik erőrendszer, mely az adottal együtt egyensúlyi erőrendszert alkot. Ez a másik erőrendszer az adott erőrendszer egyensúlyozó erőrendszere, röviden egyensúlyozója. Közös metszéspontú síkbeli erőrendszer az egyensúlyozó egyetlen erő, melynek vektora az eredő vektorának ellentétes vektora. Ha az adott erőrendszer egyensúlyi erőrendszer, az egyensúlyozó zéruserő.

2. példa

Egy G súlyú gömböt a 27. ábrán látható módon, lejtővel és függőleges fallal támasztunk meg. A gömb felületére a lejtő síkjával párhuzamos P erő hat, a gömb súlyereje a középpontban ható koncentrált erőnek tekinthető.

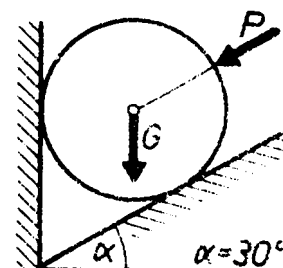
Meghatározandók a támasztósíkokon eredő reakcióerők.

Megoldás.

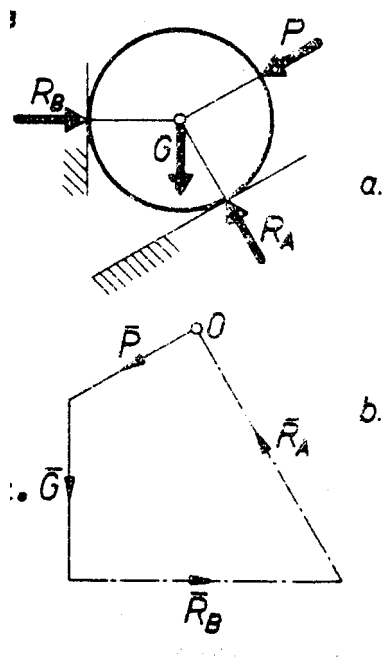
Induljunk ki a gömbre ható aktív (G, P) és reakcióerők (R_A, R_B) vizsgálatából. Ez egy négy erőből álló, közös metszéspontú síkbeli egyensúlyi erőrendszer. Mivel az R_A, R_B reakcióerők hatásvonalai ismertek (merőlegesek a támaszokra) és tudjuk, hogy az erőrendszer vektoriális összege zérus, egy tetszőleges 0 pontból kiinduló és a 28/b ábrán látható módon előállított vektorsokszögekkel a reakcióerők vektorai előállíthatók.

A feladat analitikus megoldása a következő lehet:

- a gömbközpontban felveszünk egy koordináta-rendszert,
- kiszámítjuk az erők zérussal egyenlő komponensösszegét,
- a komponensegyenletekből kiszámíthatjuk R_A -t és R_B -t.



27. ábra



28. ábra

Részletesen:

$$\sum F_{ix} = R_B \cos 0^\circ + R_A \cos 120^\circ + P \cos 210^\circ + G \cos 270^\circ = 0$$

,

$$\sum F_{iy} = R_B \sin 0^\circ + R_A \sin 120^\circ + P \sin 210^\circ + G \sin 270^\circ = 0$$

,

Egyszerűbb alakban:

$$R_B - R_A \frac{1}{2} - P \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

$$R_A \frac{\sqrt{3}}{2} - P \frac{1}{2} - G = 0.$$

$$R_A = \frac{P + 2G}{\sqrt{3}} = 0,577(p + 2G),$$

$$R_B = \frac{2P + G}{\sqrt{3}} = 0,577(2P + G).$$

További, ún. grafo - analitikus megoldáshoz jutunk, ha a grafikus megoldáshoz használt vektorábra vizsgálata alapján mennyiségi összefüggéseket állapítunk meg. Ez a módszer gyakran gyors eredményre vezet, mint most is. A 29/b ábráról leolvasható, hogy:

$$R_A \cos 30^\circ = P \sin 30^\circ + G,$$

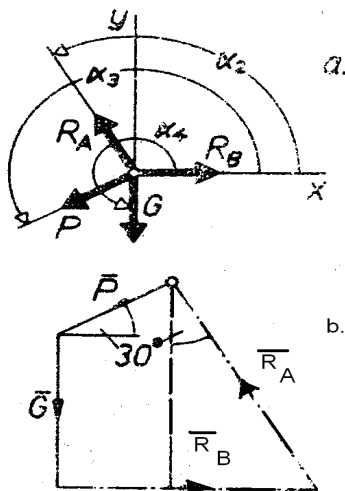
$$R_A = P \frac{1}{\sqrt{3}} + G \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\underline{R_A = 0,577(P + 2G)}.$$

$$R_B = P \cos 30^\circ + R_A \cos 60^\circ,$$

$$R_B = P \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{P + 2G}{\sqrt{3}} \frac{1}{2},$$

$$\underline{R_B = 0,577(2P + G)}.$$



29. ábra

I.6. Három erő egyensúlya

Különösen gyakran fordulnak elő három erőből álló, síkbeli egyensúlyi erőrendszerek. Megmutatjuk, hogy amennyiben nem párhuzamos erőkről van szó, az ilyen erőrendszer mindig közös metszéspontú (síkbeli) erőrendszer.

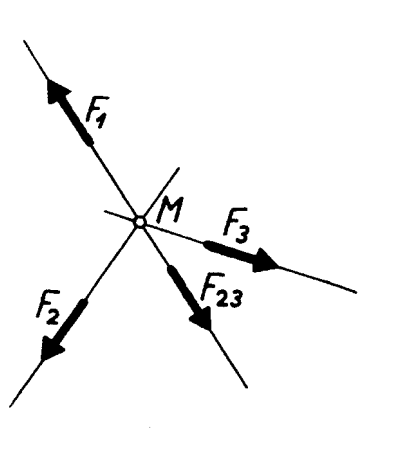
Legyen ugyanis egy ilyen erőrendszer három eredője F_1, F_2, F_3 (30. ábra).

Helyettesítsünk két erőt –mondjuk F_2 -t és F_3 -at – eredőjükkel, F_{23} -val. Ennek hatásvonala átmegy F_2 és F_3 hatásvonalának közös M metszéspontján, ami létezik, hiszen F_2 és F_3 nem párhuzamos.

Mivel egyensúlyi erőrendszerről van szó (F_1, F_{23}) $\div 0$, következésképpen F_1, F_{23} közös hatásvonalú. M rajta van F_{23} hatásvonalán, az M pont ennél fogva F_1 hatásvonalán is rajta van, tehát M a három adott erő hatásvonalainak közös pontja.

A közös metszéspontú síkbeli erőrendszerrel kapcsolatban elmondottak természetesen a három erőből álló közös metszéspontú erőrendszere is érvényesek.

E tárgypont a megelőzőhöz képest annyiban mond újat, hogy bizonyos feltételek esetén (az erők egy síkban vannak, páronként nem párhuzamosak) egy három erőből álló egyensúlyi erőrendszer csak közös metszéspontú lehet. Olykor négy erőből álló erőrendszerek egyensúlyát is a fentiek alapján vizsgálhatjuk, ha a négy erőből kettőt az eredőjükkel helyettesítünk.



30. ábra

3. Példa

A 31/a ábrán látható, ferdén elhelyezett AB rudat fix csuklóval (A) és a rúdra merőleges kötéllel rögzítjük (C). A rúd B pontjában G erő hat

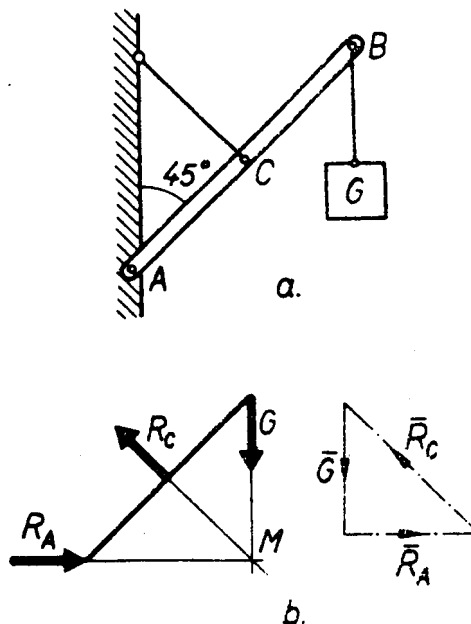
31. ábra

Határozzuk meg az R_A reakciót és az R_C kötelerőt.

Megoldás.

A rúdra három erő (31/b ábra) hat: G, R_A, R_C (a rúd súlyától eltekintünk) (G, R_A, R_C) $\div 0$.

Ezek az erők nem párhuzamosak, hatásvonalaik egy pontban metsződnek.



31. ábra

A hatásvonalak közös M pontja kijelölhető G és R_C hatásvonalának metszéspontjaként.

Az A és M pontok összekötésével R_A hatásvonala ismertté válik, így a vektorábra megszerkeszthető. A vektorábráról leolvasható, hogy

$$R_A = G, \quad R_C = \sqrt{2}G = 1,41G.$$

MEGJEGYZÉS

A három erő egyensúlyi feltétele alapján már pontosan meg tudnók határozni az 1. példában szereplő R_A jelű reakcióerőket. Tegyük teljessé a megoldást!

1.7. Az erő nyomatéka

Legyen adott a síkban egy F erő és egy P pont (32. ábra).

Ha a pontnak az erő hatásvonalától mért távolsága k , akkor az erőnek a pontra vonatkozó nyomatékán (forgatónyomaték) a következő skaláris mennyiséget értjük:

$$M_p = \pm k \cdot F \quad (\text{Nm}).$$

Pozitív előjelet veszünk, ha az erő irányába nézve a P nyomatékvonatkoztatási pont az erőtől balra fekszik. A k távolságot az erő (P -re vonatkozó) karjának is mondjuk Zérus a nyomaték értéke, ha vagy az erő, vagy a kar zérus. Ha az egymástól különböző F_1 és F_2 erőknek egy pontra vonatkozó karja k_1 illetve k_2 , akkor a két erőnek a pontra számított nyomatéka pontosan akkor egyenlő, ha teljesül:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{k_2}{k_1}.$$

Tétel: (nyomatéktétel) erőnek egy pontra vonatkozó nyomatéka egyenlő tetszőleges két összetevőjének nyomatékösszegével ugyanazon pontra.

Bizonyítás.

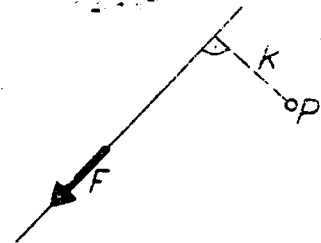
Válasszuk a tetszőleges O pontot egy derékszögű koordinátarendszer kezdőpontjául (33. ábra) és bontsuk az adott F erőt derékszögű összetevőkre.

Írjuk fel az összetevők O -ra vonatkozó nyomatékát:

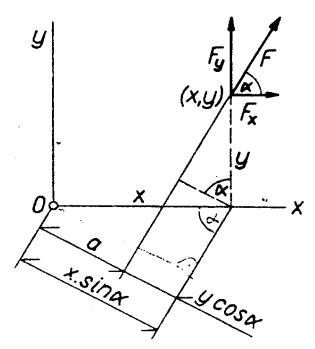
$$xF_y - yF_x = xF \sin \alpha - yF \cos \alpha = F \underbrace{(x \sin \alpha - y \cos \alpha)}_a = aF = M_0^F.$$

A **jobb oldalon** szereplő szimbólum az F erő O -ra vonatkozó nyomatékát jelenti.

Azokban a különleges esetekben, mikor P azonos a támaszponttal, illetve rajta van a hatásvonalon, a tétel nyilvánvaló, illetve hasonlóan látható be. A tételt derékszögű összetevőkre bizonyítjuk, de általánosan érvényes, nem derékszögű összetevőkre is.



32. ábra



33. ábra

Néha szükség lehet a nyomaték grafikus úton történő meghatározására. Ilyenkor a következőképpen járhatunk el,

(34. ábra). Ha az F erő p pontra vonatkozó nyomatékát kívánjuk meghatározni, bontsuk fel az F erőt S_1, S_2 összetevőkre oly módon, hogy az egyik összetevő hatásvonalát átmenjen P -n.

Ekkor

$$M_P^F = M_P^{S_1} = k_1 S_1 = k_1 p.$$

Ezek szerint, ha P -n át F -vel párhuzamos egyenest húzunk, ebből S_1 és S_2 hatásvonalai olyan k_1 távolságot metszenek ki, mely p -vel szorozva –és megfelelő előjellel ellátva– a keresett nyomatékot adja.

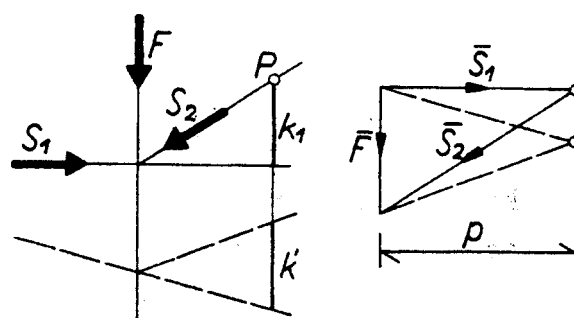
Megjegyezzük, hogy az S_1, S_2 segéderők különleges megválasztása nem lényeges, a 34. ábrán szaggatott vonallal jelölt megoldás is helyes.

$$M_P^F = k_1 \cdot p = k \cdot p.$$

A vektorábrán mindent, tehát p -t is erőléptékben kell mérni, az erők ábráján pedig rajzmértékben.

MEGJEGYZÉS

Rajztechnikai észrevétel a 33; 34. ábrához: a jegyzet ábrái nem mindenben követik a műszaki rajzi szabványokat. Lényegében a távolságok és a szögek megadásában tértünk el. Ennek oka: a nyilat, mint rajzjelet kizárólag erők, illetve egyéb vektormennyiségek ábrázolására tartjuk fenn.



34. ábra

4. Példa

Adott egy szabályos háromszög A, B, C csúcsa.

Keressük azon F erő vektorát és hatásvonalát a háromszög síkjában, melynek nyomatékai a háromszög csúcsaira a következők:

$$M_A^F = M_C^F = -M_B^F, \quad M_A^F : \text{pozitív.}$$

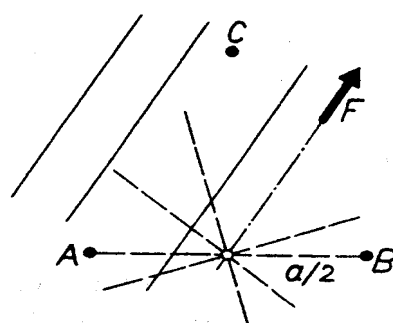
1. Megoldás.

$$M_A^F = M_C^F : \text{ebből következik, hogy az A és C pont az erő}$$

hatásvonalától egyenlő távolságra. A feltételeknek megfelelő hatásvonalak közé tartoznak a folytonos vonallal rajzolt egyenesek a 35. ábrán.

$M_C^F = -M_B^F$: ebből következik, hogy a C és B pont az erő hatásvonalától egyenlő távolságban. A feltételeknek megfelelő hatásvonalak közé tartoznak a 35. ábra szaggatottan rajzolt egyenesei.

A megadott feltételek mindegyikét kielégítő erő hatásvonalát az ábrán pont-vonallal megrajzolt egyenes, melyen az erőjelkép nyílja a nyomatékok előjeléből állapítható meg. Az erő nagysága így adódik:



35. ábra

$$M_A^F = kF = \frac{a}{2}(\cos 30^\circ)F = \frac{a}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} F, \quad F = \frac{4}{\sqrt{3}a} M_A^F.$$

2. Megoldás

Az $M_A^F = M_C^F$ feltételből következik, hogy a hatásvonal párhuzamos az AC egyenessel, tehát metszi az AB egyenest.

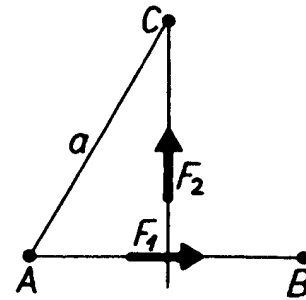
Bontsuk fel F-et az AB egyenesre eső F_1 és arra merőleges F_2 összetevőkre.

$M_A^F = M_A^{F_2} = -M_B^F$, ebből következik, hogy F_2 az AB távolság felezőpontján megy át (36. ábra).

$$M_A^F = \frac{a}{2} F_2, \quad F_2 = \frac{2}{a} M_A^F,$$

$$M_C^F = a \frac{\sqrt{3}}{2} F_1, \quad F_1 = \frac{2}{a\sqrt{3}} M_A^F,$$

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{\frac{4}{a^2} (M_A^F)^2 + \frac{4}{3a^2} (M_A^F)^2},$$



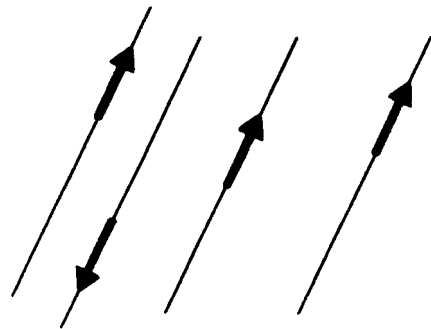
36. ábra

$$F = \frac{4}{a\sqrt{3}} M_A^F.$$

I.8. Síkbeli párhuzamos erőrendszer

Párhuzamos erőrendszernek nevezzük a párhuzamos hatásvonalú erők rendszerét (37. ábra).

Egyelőre feltesszük, hogy a hatásvonalak egy síkban vannak, vagyis síkbeli párhuzamos erőrendszerekkel foglalkozunk.

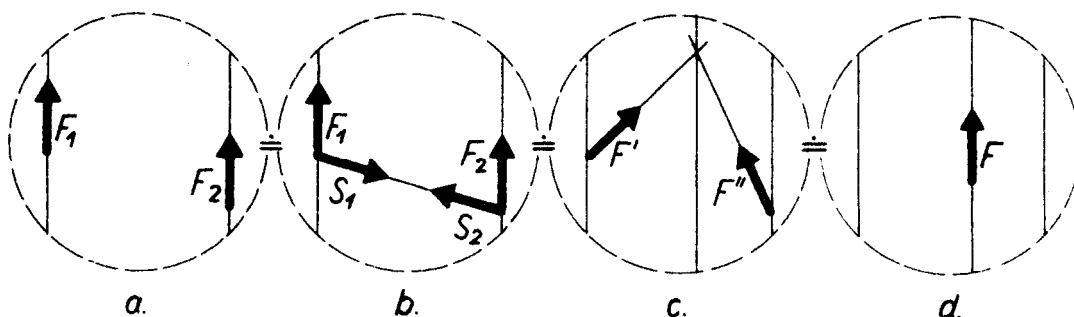


37. ábra

KÉT PÁRHUZAMOS ERŐ

A legegyszerűbb párhuzamos erőrendszer két erőből áll. Ilyen két erő összegezésére az I. axióma közvetlenül nem használható. Megmutatjuk, hogy az ilyen erőrendszer eredője – bizonyos kivételes esettől eltekintve – egyetlen erő.

Adjunk a III. axióma alapján az adott F_1, F_2 erőrendszerhez (38/a. ábra) egy S_1, S_2 egyensúlyi erőrendszert úgy, hogy $\bar{S}_1 = -\bar{S}_2$ legyen (38/b. ábra). Nyilván $(F_1, F_2) \div (F_1, F_2, S_1, S_2)$.



38. ábra

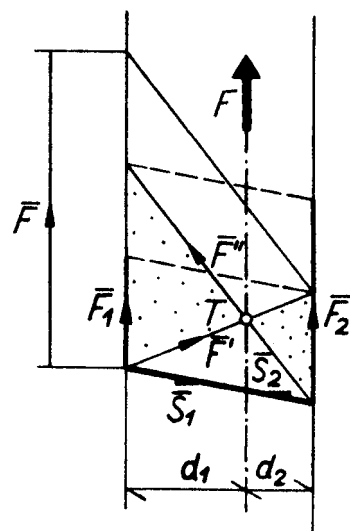
Ezekkel az erőrendszerekkel egyenértékű az F_1, S_1 illetve F_2, S_2 erők eredőiből álló F' és F'' erőrendszer a 38/c. ábrán. Ez utóbbi erőrendszer F eredője viszont már az I. axióma alapján meghatározható. Látni fogjuk, hogy F párhuzamos F_1 és F_2 erővel. Hogy ez utóbbi állítást igazoljuk, végezzük el a látott összegezést a megfelelő erővektorokkal a 39. ábrán. Megjegyezzük ehhez az ábrához, hogy S_1, S_2 segéderőket célszerű, de nem lényeges az ábrán látható módon felvenni. Az eredő hatásvonala a T ponton megy át, vektora: $\vec{F}' + \vec{F}''$
Mint az ábrából kitűnik:

$$\vec{F} = \vec{F}' + \vec{F}'' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

A hatásvonal helyzetére vonatkozólag az ábra pontozással jelölt háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$\frac{d_1}{F_2} = \frac{d_2}{F_1}; \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Az eredő hatásvonala az összetevők hatásvonalai közti távolságot az erők nagyságának arányában osztja fel, mégpedig úgy, hogy az erő a nagyobbik erőhöz van közelebb. Abban az esetben, ha a különböző nagyságú F_1 és F_2 erő iránya ellentétes, hasonló gondolatmenettel jutunk célhoz. Eredményünk birtokában már meg tudnánk határozni több erőből álló párhuzamos erőrendszer eredőjét is. Ezzel a problémával és az egyensúly feltételeivel azonban csak a következő tárgypontban foglalkozunk.

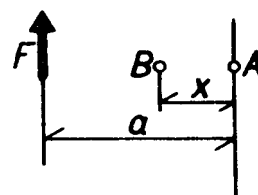


39. ábra

Igazoljuk még, hogy a nyomatéki tétel két párhuzamos erő esetében is érvényes. Előrebocsájtunk egy észrevételt: a 40. ábra alapján belátható a következő nyomatékszámítás helyessége:

$$M_B^F = -(a-x)F = -aF + xF = M_A^F + xF.$$

Ezen észrevétel, a 39. ábra és az $M_T^{F_1} + M_T^{F_2} = 0$ egyenlőség alapján egy tetszőleges P pontra (41. ábra) a párhuzamos erők nyomatéka:



40. ábra

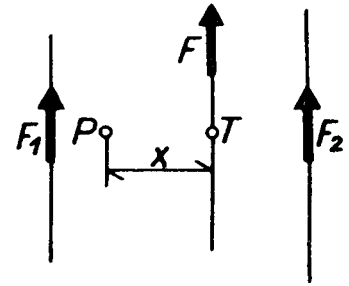
$$M_P^{F_1+F_2} = M_T^{F_1} + xF_1 + M_T^{F_2} + xF_2 = x(F_1 + F_2) = xF.$$

ERŐPÁR

Az erőpár (42. ábra) olyan két erőből álló erőrendszer, melynek
 - vektorai egymás ellentettje,
 - a két erő hatásvonala nem azonos.

Az erőpár erőinek közös F nagysága az erőpár alapja, a hatásvonalak egymástól mért k távolsága az erőpár karja.

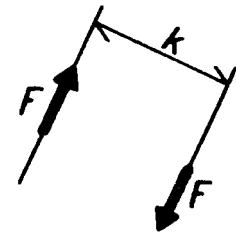
A hatásvonalak által meghatározott sík az erőpár síkje. Az erőpár nem egyensúlyi erőrendszer, noha az erőrendszer vektoriális összege zérus. A tapasztalatból tudjuk, hogy erőpár hatása alatt álló test (forgó) mozgásba jön.



41. ábra

Tétel.

Az erőpár nyomatéka síkjának bármely pontjára állandó, egyenlő az erőpár karjának és alapjának (előjeles) szorzatával. Az erőpár nyomatéka a két alap nyomatékainak algebrai összege.

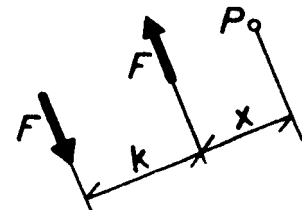


42. ábra

Bizonyítás.

Az egyik alaptól tetszőleges x távolságra lévő P pontra (43. ábra) a nyomaték $M_P = (k + x)F - xF = k \cdot F$.

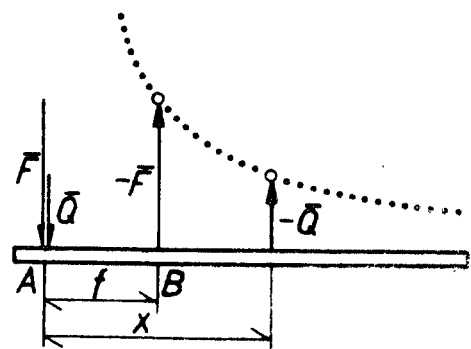
Mint látható, az erőpár nyomatékának szempontjából a nyomatékvonatkoztatási pont helyzete közömbös. Egy adott erőpárt végtelen sokféleképpen átalakíthatunk vele egyenlő nyomatékú erőpárokká. Nyilvánvaló, hogy egyenlő nyomatékú erőpárok esetén nagyobb karhoz kisebb alap tartozik és fordítva, kisebb karhoz nagyobb alap.



43. ábra

A 44. ábrán látható rúdra f karú, F alapú erőpár hat (az erőpárt most nem erőjelképpel, hanem vektorokkal ábrázoltuk). Ha olyan $fF = M$ nyomatékú és a rúdtengelyre merőleges alapú erőpárt működtetünk a rúdra, melynek erői A pontban, illetve attól x távolságban hatnak, akkor az x távolságban ható erővektor végpontja hiperbola-ágot ír le. Valóban:

$$fF = M = xQ, \quad Q = \frac{1}{x}M.$$



44. ábra

Tétel.

Két egyenlő nyomatékú erőpár sztatikailag egyenértékű.

Bizonyítás.

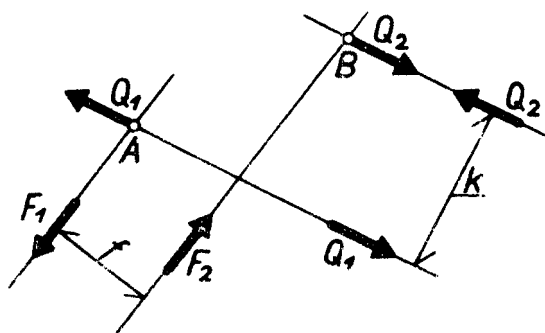
Legyen a két egyenlő nyomatékú erőpár az $f, F_1 = F_2$ illetve $k, Q_1 = Q_2$ adatokkal jellemezve és tegyük fel, hogy a két erőpár erői nem azonos állásúak (45. ábra).

Azt kell igazolni, hogy találhatunk olyan erőrendszert, mely az adott erőrendszerek (a két erőpár) bármelyikével egyensúlyban van. Legyen, a megfelelő hatásvonalak metszéspontja A illetve B. Azt állítjuk, hogy az A és B támadáspontú, $-\bar{Q}_1$ illetve $-\bar{Q}_2$ vektorú erőrendszer ilyen. Az nyilvánvaló, hogy ez az utóbbi erőrendszer a Q_1, Q_2 erőpárral egyensúlyban van. Hogy a másikkal is, az így látható be:

Írjuk fel az A támadáspontú F_1 és Q_1 erők nyomatékát B-re.

Feltételünk szerint

$$rF_1 - kQ_1 = 0.$$



45. ábra

E két erő eredőjének hatásvonala tehát átmegy az A és B ponton, vektora a B pontban ható F_2, Q_2 erők eredővektorának ellentettje. Ezért az A pontban ható F_1, Q_1 és a B pontban ható F_2, Q_2 közös hatásvonalú, egyensúlyi erőrendszer.

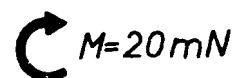
Az egyenlő nyomatékú, de párhuzamos alapú erőpárok egyenértékűségének igazolása még egyszerűbben látható be.

Az eddigiekből kitűnhetett, hogy sztatikai szempontból egy ismert síkú erőpár egyetlen lényeges adata a nyomatéka.

Az alapok vagy a kar nagysága önmagában éppúgy közömbös, mint az erőpár elhelyezkedése a saját síkjában. Éppen ezért az erőpárt gyakran csak egy körív alakú nyíllal, az erőpárjelképpel ábrázoljuk (46. ábra).

A nyíl a köríven egy forgásmódot szab meg. Ha ez az óramutató járásával ellentétes, a nyomaték pozitív, különben negatív. Az erőpárjelkép mellé írt mennyiség a nyomaték abszolút értékét és mértékegységét jelöli. Néha az erőpár karja elhanyagolhatóan kicsiny. Például ha a 47/a ábrán látható rúd furatán hengeres testet tolunk át s a hengerre erőpárt működtetünk, akkor a rudat erő hatás erőpárral jellemezhetők, amint a kinagyított ábrarészlet mutatja.

A furat kis méreteit elhanyagolva azt mondhatjuk, hogy a rúdra koncentrált erőpár hat és a 47/b ábrarészlettel ábrázoljuk.

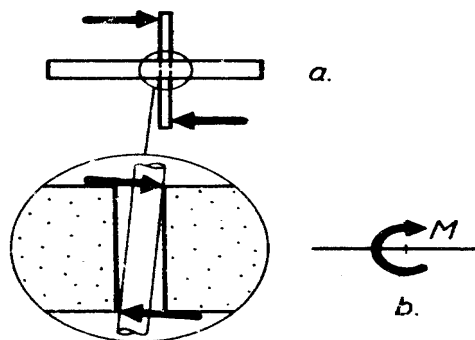


46. ábra

Tétel. Két (közös síkú) erőpár eredője olyan erőpár, melynek nyomatéka a két adott erőpár nyomatékának algebrai összege.

Bizonyítás.

Legyen a két erőpár M_1 illetve M_2 nyomatéka pozitív, egymástól különböző. Az erőpárok átalakíthatók egyenlő alapú és különböző karú erőpárokká (48. ábra) úgy, hogy

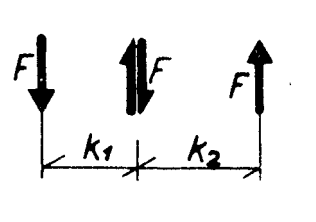


47. ábra

$$k_1 F = M_1, \quad k_2 F = M_2.$$

(Ezek az erőpárok fentebbi tételünk értelmében sztatikailag egyenértékűek az eredeti erőpárokkal.)

Ha a két erőpárt saját síkjában úgy mozgatjuk el, hogy két ellentétes irányú alap egybeessék, akkor ezeket elhagyva az erőrendszer eredője egyetlen F alapú és $k_1 + k_2$ alapú, tehát $M_1 + M_2$ nyomatékú erőpár lesz. Ha a nyomatékok előjele különböző, a bizonyítás akkor is hasonló.



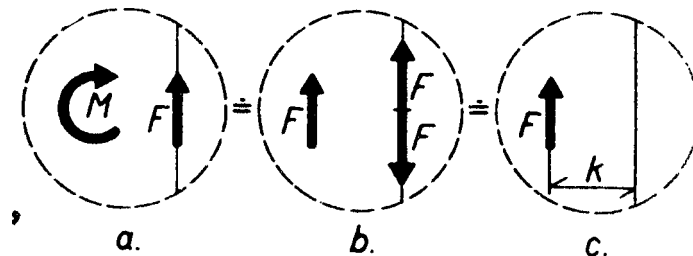
48. ábra

ERŐ ÉS ERŐPÁR

Tétel. Erő és erőpár eredője egyetlen erő, melynek vektora egyenlő az adott erő hatásvonalától $\frac{M}{F}$ távolságra van, ahol M az erőpár nyomatéka, F az erő nagysága.

Bizonyítás.

Legyen az adott erőpár nyomatéka M , az erő F (49/a ábra). Az erőpár előállítható F alappal és $k = \frac{M}{F}$ karral a 49/b ábra szerint.



49. ábra

A kapott erőrendszerből elhagyva az egyensúlyban lévő $\vec{F}, -\vec{F}$ vektorú erőrendszert, egyetlen, a tételnek eleget tevő $\vec{F}$ vektorú erőt kapunk. Arra vonatkozólag, hogy az eredő a megadott erő hatásvonalának melyik oldalán lesz, a következő mondható: ha M pozitív, akkor az erő irányába nézve a hatásvonal jobb oldalán lesz az eredő erő, különben a bal oldalon.

Erő és erőpár a fenti tétel értelmében nem alkot egyensúlyi erőrendszert.

Erőpár erőpárral egyensúlyban lehet.

MEGJEGYZÉS

Vigyázzunk arra, hogy az „erőpár” és a „nyomaték” elnevezéseket a megfelelő helyen alkalmazzuk, és ne keverjük össze őket. Az egyik egy erőrendszert, a másik egy mennyiséget jelent.

5. Példa

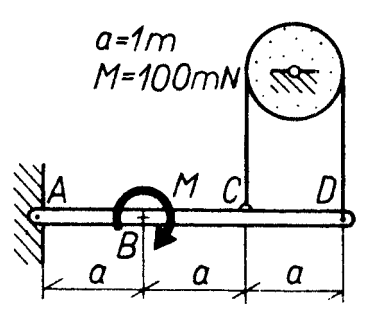
Az 50. ábrán látható súlytalan rudat csukló és csigán átvezetett kötel segítségével rögzítjük.

A rúd B pontjában M nyomatékú koncentrált erőpár hat. Állapítsuk meg az R_A reakcióerő és a kötélágakban működő erők nagyságát.

Megoldás.

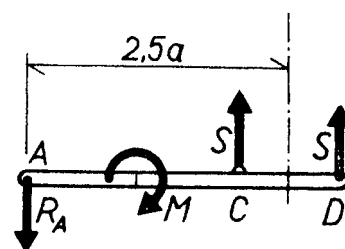
Vizsgáljuk a rúdra ható erőket!

C és D pontban egyenlő nagy S erők hatnak. Ez rögtön belátható, ha a csiga egyensúlyát vizsgáljuk (51. ábra).



50. ábra

Az A pontban ható reakcióerő és a C, D pontokban ható S erők eredője az M erőpárral egyensúlyban van. Az S erők eredője az ábrán pontvonallal megrajzolt hatásvonalon „felfelé” hat. Mivel az M erőpárral csak erőpár tarthat egyensúlyt, következik, hogy R_A „lefelé” irányuló, $2S$ nagyságú erő. Most már könnyű kiszámítani a keresett értékeket:



51. ábra

$$\frac{5}{2}a2S = M, \quad S = \frac{M}{5a} = \frac{100}{5.1}, \quad \underline{S = 20\text{N}}, \quad \underline{R_A = 40\text{N}}.$$

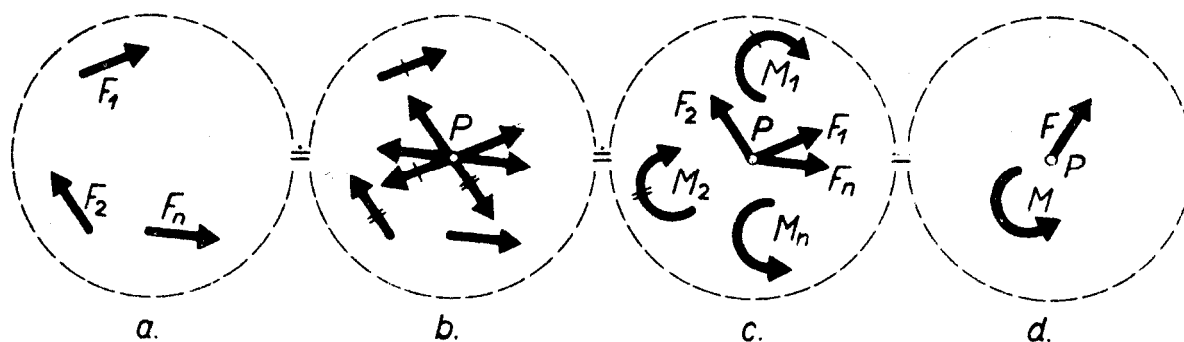
I.9. Síkbeli általános erőrendszer

EREDŐ

Az olyan síkbeli erőrendszert mely nem közös metszéspontú és nem párhuzamos, síkbeli általános erőrendszernek (szétszórt erőrendszer) nevezzük.

Az ilyen erőrendszer eredőjéhez úgy fogunk eljutni, hogy az adott erőrendszert sztatikailag egyenértékű, egyszerűbb erőrendszerré alakítjuk.

Az 52/a ábra szemlélteti egy adott n erőből álló erőrendszer első, második és n -edik erőét. Ezzel egyenértékű erőrendszert kapunk, ha az erőrendszerhez további –egyensúlyban lévő– erőket csatolunk oly módon, hogy egy tetszőlegesen felvett P ponthoz, mint támadásponthoz az $\vec{F}_1, -\vec{F}_1, \vec{F}_2, -\vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, -\vec{F}_n$ vektorú erőket rendeljük (52/b ábra).



52. ábra

Ezt a III. axióma alapján megtehetjük. Az azonos indexű erőkből egy-egy erőt és erőpárt képezve az 52/c ábrán látható, $F_1, F_2, \dots, F_n$ erőből és $M_1, M_2, \dots, M_n$ erőpárból álló rendszert nyerjük.

A közös metszéspontú $F_1, F_2, \dots, F_n$ erőket egyetlen P kezdőpontú eredő erővé, a közös síkú $M_1, M_2, \dots, M_n$ erőpárokat egyetlen eredő erőpárrá összetéve, az eredeti erőrendszert egy vele egyenértékű, F erőből és M erőpárból álló rendszerre alakítottuk (52/d ábra).

Az imént látott eljárás az erőrendszernek egy pontra való redukálása.

Vegyük észre, hogy F a P pont választásától független, továbbá hogy F és M bármelyike esetleg zérus is lehet!

Az 52/d ábrán látható rendszer F és M értékétől függően még tovább egyszerűsíthető:

	$F \neq 0, M \neq 0$	$F \neq 0, M = 0$	$F = 0, M \neq 0$	$F = 0, M = 0$
Az F, M rendszer eredője:	egyetlen erő	egyetlen erő	egyetlen erőpár	zéruserő (egyensúly van)

Lényegében három eset van tehát: eredő erő, eredő erőpár és egyensúly.

Az $F \neq 0, M \neq 0$ és az $F \neq 0, M = 0$ esetek közt csak annyi a különbség, hogy az első esetben az eredő hatásvonala nem megy át a P redukálási ponton.

AZ EGYENSÚLY ANALITIKUS FELTÉTELE

Még egyszer megfogalmazzuk a fentieket, az analitikus geometria nyelvén. A tetszőlegesen választott P pont most legyen egy x, y koordináta-rendszer kezdőpontja (53. ábra), és tekintsük ismertnek az $F_{1x}, F_{1y}, F_{2x}, F_{2y}, \dots, F_{nx}, F_{ny}$ erőkomponenseket,

Valamint az $x_1, x_2, y_1, y_2, \dots, x_n, y_n$ támadáspontokat. Az ábra az adott erőrendszer erőit nem tünteti fel. Az erők 0-ra történt redukálásával nyert közös metszéspontú erőrendszer F eredőjének komponensei.

Így számíthatók:

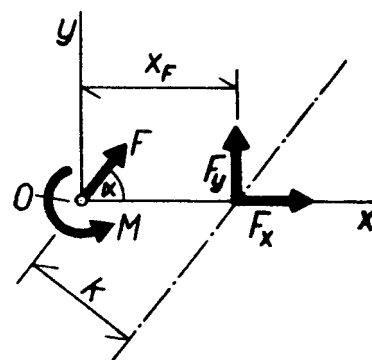
$$F_x = \sum F_{ix}, \quad F_y = \sum F_{iy}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Az eredő erő irányszöge és nagysága:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_y}{F_x}, \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}.$$

Az 52/c ábrán jelölt erőpárok nyomatékai most azonosak az egyes erők 0-ra vonatkozó nyomatékaival. Ezek a nyomatéktétel alapján számíthatók; algebrai összegük az eredő erőpár nyomatéka:

$$M = M_0^{F_1 \dots F_n} = \sum |x_i F_{iy} - y_i F_{ix}|, \quad |i = 1, 2, \dots, n|.$$



53. ábra

Amennyiben $F \neq 0, M \neq 0$, még meg kell határoznunk az eredő erő hatásvonalának helyzetét.

Az ismert tétel szerint a hatásvonal az O ponttól $k = \frac{M}{F}$ távolságra lesz, ha F irányába nézünk,

akkor pozitív nyomaték esetében O-tól jobbra, különben balra. Más megoldással így tehetjük egyértelművé az eredő erő helyét: meghatározzuk a hatásvonal és –például- az x tengely metszéspontját. Ha az eredő erőt e pontban bontjuk összetevőkre (53. ábra), akkor a metszéspont koordinátáját x_F -vel jelölve:

$$x_F F_y = M, \quad x_F = \frac{M}{F_y}.$$

Az egyensúly fennállásához kell, hogy

$$F=0, \text{ vagyis } \sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0,$$

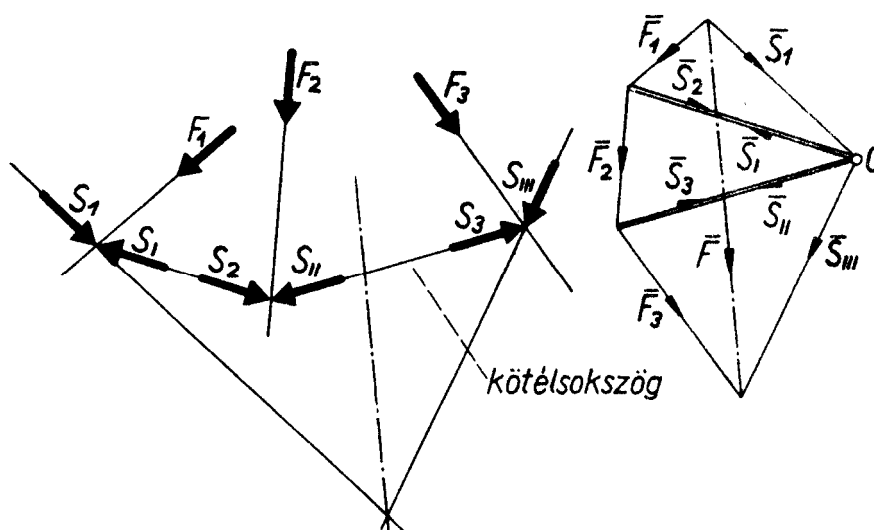
Továbbá $M=0$, tehát $\sum (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0$ legyen.

Ezek az egyensúlynak szükséges és elégséges feltételei.

AZ EGYENSÚLY GRAFIKUS FELTÉTELE

A síkbeli általános erőrendszer eredőjét egy más megfontolás útján is meghatározhatjuk. A módszert egyszerűség kedvéért három erőből álló erőrendszeren mutatjuk be, tetszőleges számú erőből álló rendszer esetén az eljárás hasonló.

Legyen az adott erőrendszer (F_1, F_2, F_3) /54. ábra/.



54. ábra

Helyettesítsük ezt az erőrendszert egy különlegesen választott, vele egyenértékű másik erőrendszerrel a következő módon: az F_1 erőt helyettesítsük olyan S_1, S_1' erőkkel, melyekre fennáll:

$$\bar{S}_1 + \bar{S}_1' = \bar{F}_1.$$

Az F_2 erőt hasonló tulajdonságú S_2, S_2' erőkkel helyettesítsük oly módon, hogy

$$S_1' \text{ és } S_2' \text{ hatásvonala közös legyen,}$$

$$\bar{S}_2 = -\bar{S}_1' \text{ teljesüljön.}$$

A helyettesítő erőrendszer többi elemére hasonló feltételek teljesülnek. Ilyen módon a vektorábrán a segéderők vektorainak lesz egy közös pontja, az O póluspont. Ezt szabadon választjuk meg.

Ekkor $(F_1, F_2, F_3) \doteq (S_1, S_I, S_2, S_{II}, S_3, S_{III})$.

Mivel $(S_I, S_2), (S_{II}, S_3)$ páronként egyensúlyban lévő erőkből áll, melyek a III. axióma értelmében elhagyhatók, nyilván:

$$(F_1, F_2, F_3) \doteq (S_1, S_{III})$$

Ez utóbbi erőrendszer eredője –mely egyben az eredeti erőrendszeré is- az ábrán leolvasható módon megszerkeszthető: S_1 és S_{III} hatásvonalának metszéspontja megadja az eredő erő hatásvonalának egy pontját, az eredő vektora pedig a vektorábrából nyerhető.

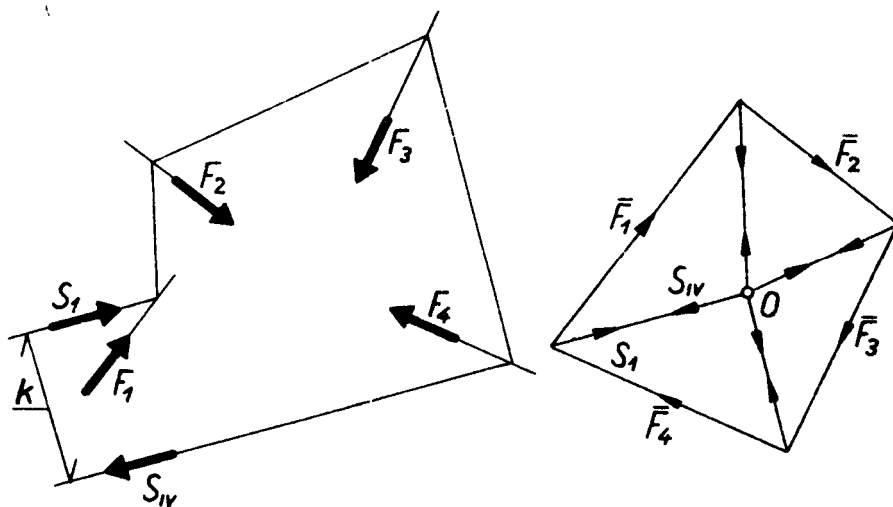
Az $S_1, S_I, S_2, \dots$ erőrendszer hatásvonalai által alkotott töröttvonal neve kötélsokszög. Az elnevezés magyarázata: egy végein rögzített, koncentrált erőkkel terhelt kötél darab egyensúlyi alakja ilyen töröttvonal.

Hogy a síkbeli általános erőrendszerek lehetséges eredői fölött áttekintést nyerjünk, elegendő az $S_1, S_I, S_2, \dots$ helyettesítő erőrendszert vizsgálni, hiszen ez egyenértékű az $F_1, F_2, \dots, F_n$ erőrendszerrel.

Ha a helyettesítő erőrendszer első és utolsó erőének vektoriális összege zérustól különbözik, más szóval az $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ vektorsokszög nyitott, az eredeti erőrendszer eredője egyetlen erő.

Ezt az esetet szemlélteti az 54. ábra.

Ha a helyettesítő erőrendszer első és utolsó erőének vektoriális összege zérus, két eset lehetséges.

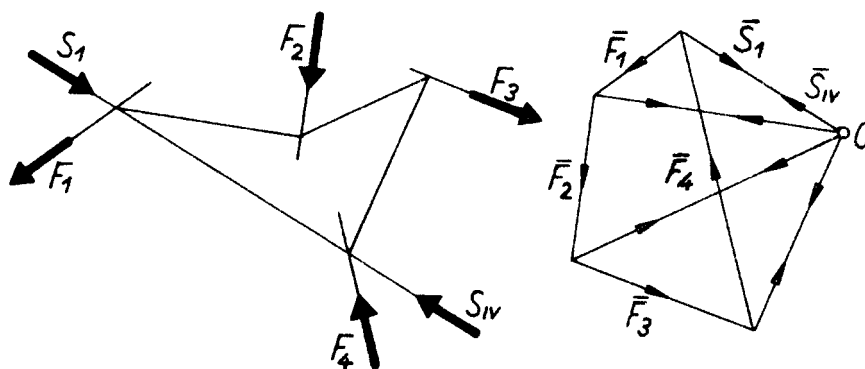


55. ábra

Ha a helyettesítő erőrendszer első és utolsó erője különböző hatásvonalú, akkor a helyettesítő erőrendszer –és az eredeti is- erőpárral egyenértékű. Ilyen esetet szemléltet az 55. ábra.

Az erőpár alapja $S_1 = S_{IV}$, karja k .

Ha a helyettesítő erőrendszer első és utolsó erője közös hatásvonalú (zárt vektorsokszög mellett), a helyettesítő erőrendszer, s a vele egyenértékű eredeti erőrendszer is egyensúlyban van (56. ábra).



56. ábra

MEGJEGYZÉS

Az 54. ábrán az eredő hatásvonalának megszerkesztéséhez elegendő lenne csak a kötelsokszög megrajzolása, a helyettesítő erőrendszer nélkül. Ehhez szükségtelen a helyettesítő erők vektorainak feltüntetése, elegendő csak a pólust az adott erőrendszer vektorsokszögének szögpontjaival összekötni. Az így nyert pólussugarakkal párhuzamosakat húzva (a megfelelő hatásvonalak között), már előállítható egy kötelsokszög.

Felhívjuk a figyelmet a síkbeli általános erőrendszer egyensúlyának feltételét jelentő három egyenletre. Gyakorlati alkalmazásukat a következő tárgypont ismerteti.

I.10. A sztatikai feladatok megoldásáról

Már az eddigiekből is kitűnhetett, hogy a sztatikai fogalmak és tételek pusztá megértése nem mindig jelenti egyúttal azok alkalmazni tudását is. Más szóval: az elvek ismerete nem elég, feladatmegoldó képességet is ki kell alakítani. A problémák megragadni tudása, a megoldáshoz vezető út megtalálása és a logikai biztonság megszerzése csak számos feladat önálló megoldása útján sikerül.

Mégis, fel lehet vázolni a sztatikai feladatok megoldásának egy általában követhető útját és rá lehet mutatni bizonyos –kezdőknél gyakori- hibákra.

A megoldásmenet általánosságban a következő:

1. Megértjük az adott műszaki problémát.

(Itt csak a probléma sztatikai oldalára gondolunk).

2. Megalkotjuk a probléma modelljét.

Ez rendszerint az adott szerkezetek egyszerűsített vázlata, mely a szerkezet sztatikai szempontból lényeges elemeit tartalmazza, a szerkezetre ható erőkkel együtt.

Különleges figyelmet igényel az erők helyes számbavétele.

Gyakori hibák:

- létező erőket mellőz, nem létező erőket tartalmaz a vázlat,
- egyes erők hatásvonalát, sőt irányát kellő indoklás nélkül, a kényszerek - megszabta feltételeket figyelmen kívül hagyva veszünk fel,
- az akció – reakció elv figyelmen kívül hagyása.

Több részből álló szerkezet esetén célszerű a szerkezetet részekre bontani, a megfelelő erőkkel együtt.

Ilyenkor a belső reakcióerőkről nem szabad megfeledkezni.

3. Felírjuk az egyensúlyi egyenleteket.

Rendszerint a szerkezetre ható külső vagy belső reakciók meghatározása a cél. Ha az egész szerkezet egyensúlyban van, részei is egyensúlyban vannak, így részére is felírhatjuk –amennyiben szükséges- az egyensúlyi egyenleteket.

Figyelmet érdemel –mert kevesebb számítási munkát eredményezhet- a koordináta rendszer célszerű megválasztása.

4. Kiszámítjuk a keresett ismeretleneket.

Ezt a lépést is érdemes körültekintően végezni. Alkalmas számítási sorrendet követve, például ismeretlenes egyenleteket kell megoldanunk egyetlen, többismeretlenes egyenletrendszer helyett.

5. Ha lehetséges ellenőrizzük eredményeinket.

Ez jelentheti a számított értékeknek más módon –például szerkesztéssel- történő ellenőrzését, és jelentheti az eredményeknek az eredeti műszaki probléma szempontjából történő mérlegelését.

MEGJEGYZÉS

Kezdetben úgy tűnhet: „ahány feladat, annyi megoldási ötletre van szükség”. Némi rutin megszerzése után felismerjük, hogy az erők helyes számbavétele után rendszerint csak az egyensúlyi egyenleteket kell felírni (esetleg nem is mindegyiket).

A következőkben a rövidség, illetve a könnyebb követhetőség kedvéért a következő jelölésekkel élünk:

$\sum F_{ix}$ helyett: $\rightarrow$,

$\sum F_{iy}$ helyett: $\uparrow$,

$\sum M_{ip}$ helyett: 

6. Példa

A vízszintessel α szöget bezáró, $3a$ hosszúságú, rudakból és csigákból álló szerkezet az 57. ábrán látható módon van támasztva, illetve kötél segítségével rögzítve.

A csigákon átfutó kötél segítségével $2G=4\text{kN}$ súlyú terhet akarunk felemelni. A kötelet csörlővel mozgatjuk.

Kérdés: mekkora erő ébred a rögzítő kötélben, egyenletes teheremeléskor, milyen erők hatnak a szerkezet alsó végével érintkező vízszintes és függőleges síkú támaszokra?

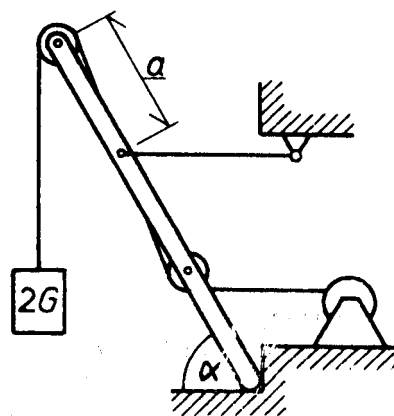
Megoldás.

A probléma mechanikai modelljének megalkotása céljából bizonyos feltevésekkel élünk.

Feltesszük, hogy

- a szerkezet súlya a terhelés súlyához képest elhanyagolható,
- a csigák kisméretűek,
- a kötél ideális,
- súrlódás nincs.

A szerkezet szimmetriáját kihasználva, csak egyetlen rúddal és $G=2\text{kN}$ terheléssel foglalkozunk.



57. ábra

Növeljük gondolatban a csörlő által az emelőkötélre gyakorolt erőt O-tól G-ig. G elérésekor még a szerkezet minden része egyensúlyban, illetve egymáshoz képest nyugodalomban van. Vizsgálhatnánk minden rész egyensúlyát külön – külön, a feladatunk szempontjából előnyösebb úgy eljárni, hogy egyetlen szerkezetnek tekintjük a rúdból, csigákból és az

emelőkötélnak a csigák közti darabjából álló rendszert (ide számítva a csigákkal érintkező kötélrészeket is).

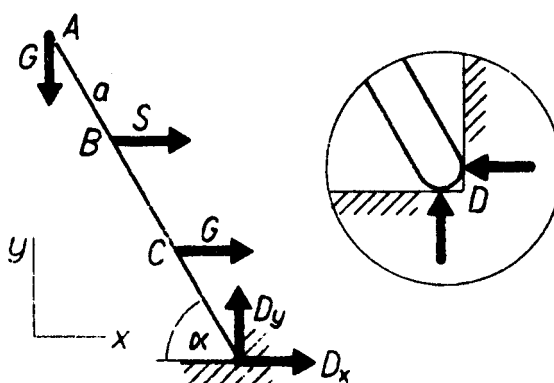
Az így definiált rendszerre ható erők a következők (58. ábra):

- a kötélvégekre ható G nagyságú erők, melyet a csigák kis méretei miatt a rúdvégén, illetve a rúd alsó harmadában hatónak tekinthetők,
- a rögzítő kötéltől gyakorolt S erő, melynek iránya (éppúgy mint az emelőkötélnél) a kötélt húzott voltából adódik,
- a támaszoknál ébredő erők.

Ez utóbbiról annyit mondhatunk, hogy olyan erő, melynek hatásvonalát közelítőleg a támasztósíkok által meghatározott D ponton halad át. Pontosabb képet a kinagyított ábrarészlet mutat.

Végeredményben a probléma modellje egy alsó végén két síkkal megtámasztott súlytalan rúd, melyre a felsorolt, ismert irányú koncentrált erők hatnak.

Ezek közül a D -ben ható erőnek irányát nem ismerjük. A számításhoz szükséges koordináta – rendszert vegyük fel az 58. ábrán látható módon (a koordináta – rendszert a későbbiekben gyakran nem tüntetjük fel). Mielőtt a számításhoz foglalnánk, megjegyezzük még, hogy a D pontban ható erőt összetevőkre bontva tüntettük fel. Célszerű pozitív komponenseket feltételezni, a számítás eredményeképpen adódó D_x, D_y fogja megmutatni, milyen irányú a két összetevő.



58. ábra

$$\rightarrow D_x + G + S = 0$$

$$\uparrow D_y - G = 0$$

$$\curvearrowright D \quad \underline{3a \cos \alpha G - 2a \sin \alpha S - a \sin \alpha G = 0}$$

A második egyenletből máris eredményt kapunk: $D_y = G = 2kN$.

Az első egyenletet 2-vel szorozva, a harmadikat egyszerűsítve, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} 2D_x + 2G + 2S &= 0 \\ \underline{3G \operatorname{ctg} \alpha - 2S - G} &= 0 \end{aligned}$$

A két egyenletet összeadva:

$$\begin{aligned} 2D_x + G(1 + 3 \operatorname{ctg} \alpha) &= 0, \\ D_x &= -\frac{G}{2}(1 + 3 \operatorname{ctg} \alpha). \end{aligned}$$

A D-ben ható erő vízszintes összetevője tehát balra mutat, mint vártuk.

A rögzítő kötélen eredő S erőt a $\rightarrow$ egyenletbe való helyettesítéssel számíthatjuk:

$$S = -G - D_x = -G + \frac{G}{2}(1 + 3\operatorname{ctg}\alpha),$$

$$S = \frac{G}{2}(3\operatorname{ctg}\alpha - 1).$$

S csak addig pozitív míg $3\operatorname{ctg}\alpha > 1$, vagyis ha $\alpha < \arcsin \frac{1}{3} = 71^\circ 34'$.

Ha α ennél az értéknél nagyobb, S irányának az ábrán látható iránnyal ellentétesnek kell lennie. Ilyen irányú erőt azonban a rögzítő kötélen nem fejthet ki, csak rúd.

Eredeti problémánk szempontjából tehát arra a következtetésre jutottunk, hogy bizonyos hajlásszögön felül a rögzítés már nem biztosítható kötélen.

Végül nézzük, milyen numerikus eredményekre jutunk pl.

$\alpha = 60^\circ$ esetén

$$\underline{D_x = -2,50\text{ kN}}, \quad \underline{D_y = 2\text{ kN}}, \quad \underline{S = 0,5\text{ kN}}.$$

I. 11. Egyensúlyozási feladatok

CULMANN - FÉLE SZRKESTÉS

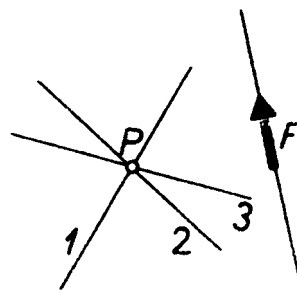
Gyakran előfordul, hogy egy adott erőrendszert egy bizonyos feltételeknek eleget tevő erőrendszerrel kell egyensúlyozni. A lehetséges egyensúlyozási feladatok közül néhány alapeladatot ismertetünk.

1. Egyensúlyozzunk egyetlen adott F erőt három olyan erővel, melyek hatásvonalai egy F hatásvonalán kívüli P pontban metsződnek (59. ábra)

A feladat nem oldható meg. F ugyanis csak olyan erővel egyensúlyozható, melynek hatásvonalja azonos F hatásvonalával. Az egyensúlyozó tehát nem tartalmazhatja P-t. Márpedig akárhogyan választanánk a megadott hatásvonalakon működő egyensúlyozó erőket, ezek eredője átmenne P-n.

2. Egyensúlyozzunk egyetlen adott F erőt három olyan erővel, melyek hatásvonalai egy, az F erő hatásvonalán lévő P pontban metsződnek.

A feladatnak ∞ sok különböző megoldása van.

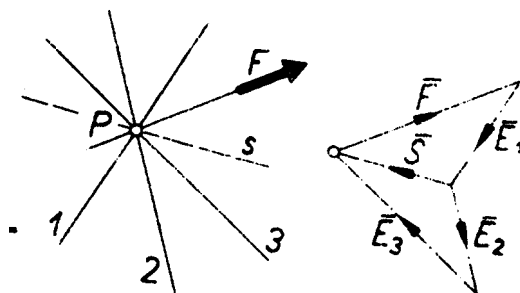


59. ábra

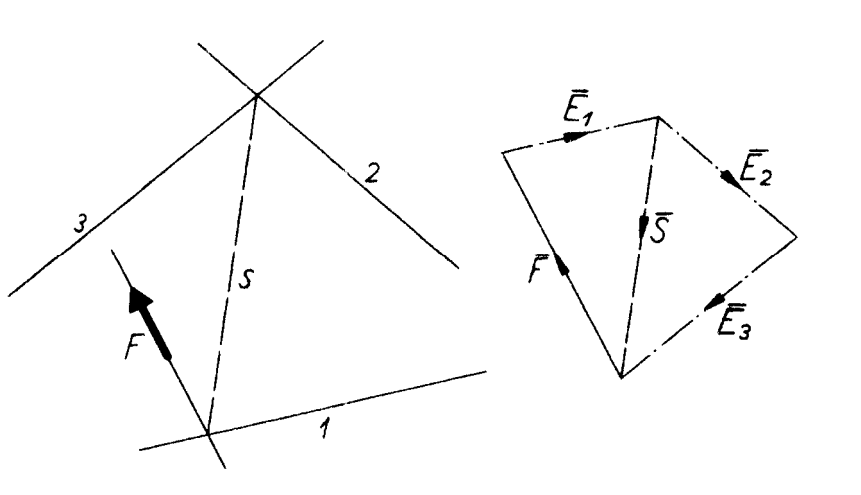
Legyenek az egyensúlyozó erőrendszer hatásvonalai az 1, 2, 3 jelű egyenesek, s vegyünk fel P-n keresztül egy s jelű segédegyenest (60. ábra).

Egyensúlyozzuk F-et az 1 és s jelű hatásvonalakon működő, E_1 ill. S erőkkel, majd bontsuk fel S erőt a 2 és 3 egyeneseken ható, $\bar{E}_2$ ill. $\bar{E}_3$ vektorú egyensúlyozó erőkre. Ez a szerkesztés a (60) vektorábra szerint mindig elvégezhető, és s felvételétől függően különböző megoldásokhoz vezet.

3. Egyensúlyozzuk egyetlen adott F erőt három olyan erővel, melyek hatásvonalai nem metsződnek ugyanabban a pontban. Ez a nevezetes feladat CULMANN-tól származik. A feladatnak pontosan egy megoldása van.



60. ábra



61. ábra

Legyenek az egyensúlyozó erőrendszer hatásvonalai az 1, 2, 3 jelű egyenesek. Egyensúlyozzuk először F -et az 1 hatásvonalon és a 61. ábrán látható módon választott s segédegyenesen.

Ez az egyenes tehát az f erő hatásvonalának és 1-nek metszéspontján, valamint a 2 és 3 egyenesek metszéspontján halad át.

F -et egyensúlyozni tudjuk az 1, s egyeneseken ható $\bar{E}_1$ és $\bar{S}$ vektorú erőkkel. Ezután még S erőt felbontjuk (nem egyensúlyozzuk!) $\bar{E}_2$ és $\bar{E}_3$ vektorú erőkre, s így az F erő E_1, E_2, E_3 egyensúlyozó erőrendszeréhez jutunk.

RITTER – FÉLE SZÁMÍTÁS

A feladat számító megoldása RITTER nevéhez fűződik.

Legyen ismét az 1, 2, 3 hatásvonalakon működő keresett három egyensúlyozó erő E_1, E_2, E_3 .

Ekkor $(F, E_1, E_2, E_3) \doteq 0$,

Következésképpen az erőrendszer nyomatéka a sík bármely pontjára zérus.

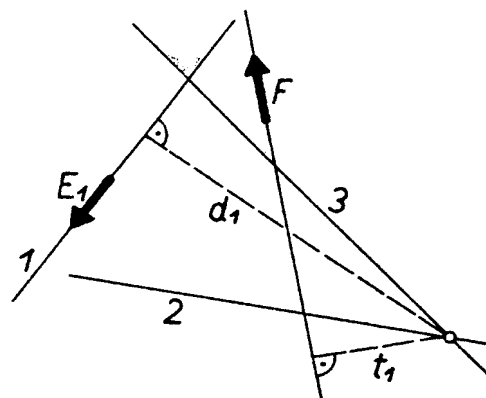
Válasszuk nyomatékvonatkoztatási pontul az egyensúlyozó erőrendszer két hatásvonalának metszéspontját. Erre a pontra két egyensúlyozó erő nyomatéka zérus, a nyomatékegyenletből így egy ismeretlen meghatározható.

A 62. ábrán a 2 és 3 egyenesek metszéspontjára felírt nyomatékegyenlet például így fest:

$$d_1 E_1 - t_1 F = 0;$$

$$E_1 = \frac{t_1 F}{d_1}.$$

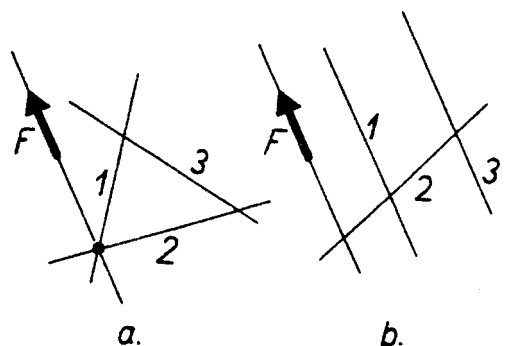
A d_1, t_1 távolságok ismeretében tehát E_1 meghatározható. Az E_1 egyensúlyozó irányát abból a feltételből kapjuk, hogy E_1 a nyomatékvonatkoztatási pontra vonatkozólag ellentétes forgásmódot szabjon meg, mint F .



62. ábra

MEGJEGYZÉS

Tárgyalásunkban hallgatólagosan feltettük, hogy a megadott három hatásvonal metszéspontjai közül egyik sincs az egyensúlyozandó erő hatásvonalán és egyik sincs a végtelenben. Ajánlatos tehát végiggondolni a 63. ábrán látható eseteket is. Ugyancsak figyelmet érdemel egy erőpár egyensúlyozása három adott hatásvonalon.



63. ábra

7. Példa

$G=1\text{kN}$ súlyú, hasáb alakú testet erősítünk függőleges falhoz csuklós rudak segítségével, a 64. ábrán látható módon. Határozzuk meg a rudakban ébredő erőket!

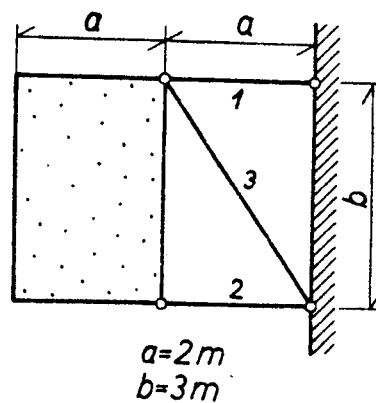
Megoldás:

A rudak súlyát elhanyagolva, ábrázoljuk a hasábra ható erőket:

G : a hasáb geometriai középpontjában ható súlyerő,

E_1, E_2, E_3 : a rudak által a hasábra kifejtett egyensúlyozó erők (65. ábra)

Ezek irányát előre megállapítani nem tudjuk. Célszerű mindegyik rudat húzottnek feltételezni. Ha a számítás során negatív erőnagyság adódik, az azt jelenti, hogy az erő irányát tévesen vettük fel, a rúd nyomott. A feladatot szerkesztéssel nem oldjuk meg, szóról – szóra a Culmann – féle eljárást kellene alkalmazni.



64. ábra

A Ritter – féle számító eljárás viszont nem mindegyik rúd esetében alkalmazható. Nézzük az egyes rudakat! A 2 és 3 rudak metszéspontjára felírt nyomatékegyenlet:

$$3G - 3E_1 = 0,$$

$$E_1 = G = 1kN, \text{ a rúd húzott.}$$

65. ábra

Az 1 és 3 rudak metszéspontjára:

$$1G + 3E_2 = 0, \quad E_2 = -\frac{G}{3}.$$

Az erő irányát tévesen vettük fel, a rúd nyomott:

$$E_2 = 0,333kN.$$

65. ábra

A 3 jelű rúd által kifejezett E_3 egyensúlyozó erő meghatározására nem írhatunk fel újabb nyomatékegyenletet az 1 és 2 jelű rúdtengelyek metszéspontjára, hiszen az nem létezik. Mivel E_1 és E_2 már ismert, felírhatnánk ugyan egy tetszőleges pontra nyomatékot, de egyszerűbben is eljárhatunk. Mivel $(G, E_1, E_2, E_3) \neq 0$, írjunk fel egy komponens - egyenletet:

$$\uparrow -G - E_3 \cos \alpha = -G - E_3 \frac{3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = 0,$$

$$E_3 = -G \frac{\sqrt{13}}{3}.$$

E_3 ezek szerint tévesen van feltüntetve az ábrán, a rúd valójában nyomott, $E_3 = 1,202kN$.

I. 12. Vektorok II.

A térbeli sztatika tárgyalását a vektoralgebra megfelelő részeinek áttekintésével készítjük elő.

A tetszőleges $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok skaláris szorzata egy skaláris mennyiség, melynek

- jelölése: $\vec{a}\vec{b}$ vagy $\vec{a} \cdot \vec{b}$,

- értelmezése: $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$,

φ a két vektor által bezárt szög (66. ábra).

A definícióból kiolvasható, hogy $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$.

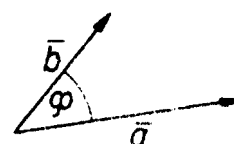
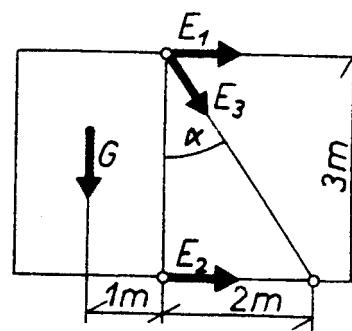
A későbbiekben szükségünk lesz az alábbi tételekre.

Tétel. Két vektor skaláris szorzata pontosan akkor* 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

Tétel. Minden $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorra és k számra

$$k\vec{a}\vec{b} = (k\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(k\vec{b}).$$

66. ábra



Tétel. $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$.

Tétel. Egy $\bar{a}$ vektornak egy $\bar{e}$ egységvektorral párhuzamos összetevője
 $\bar{a}_p = (\bar{e}\bar{a})\bar{e}$.

Tétel. Az $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ és $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$
vektorok skaláris szorzata
 $\bar{a}\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

A térbeli $\bar{a}, \bar{b}$ vektorok vektoriális szorzata

$\bar{a} \times \bar{b}$ egy olyan vektor (67. ábra),

a / amelynek hossza $|\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$,

b / amely merőleges az $\bar{a}, \bar{b}$ vektorokra,

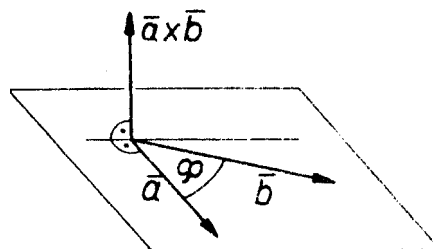
c / amelynek iránya olyan, hogy $\bar{a}, \bar{b}$ és $\bar{a} \times \bar{b}$ jobbrendszer alkot.

* vagyis akkor és csak akkor

A definícióból kiolvasható, hogy

$$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}.$$

Tétel. Két vektor vektoriális szorzata pontosan akkor 0, ha a két vektor párhuzamos.



Tétel. Minden $\bar{a}, \bar{b}$ vektorra és k számra
 $k(\bar{a} \times \bar{b}) = (k\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (k\bar{b})$.

67. ábra

Tétel. Az $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ és $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$ vektorok vektoriális szorzata

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

I.13. Nyomaték pontra és tengelyre

VEKTOR NYOMATÉKA PONTRA

A mechanikai problémák vizsgálatához a skaláris nyomatékdefiníció nem mindig megfelelő. Rámutatunk például arra, hogy a skaláris nyomaték előjele függ attól: az erő és a nyomatékvonatközpont pont síkjának melyik oldaláról szemlélődünk. Alkalmasabb definíciót fogunk bevezetni, mely a skaláris nyomatékfogalom – nyújtotta előnyöket is megtartja. Mivel a mechanikában több vektormennyiség nyomatéka előfordul, az általánosság kedvéért vektor nyomatékával foglalkozunk, s eredményeink a mechanikai vektormennyiségekre is érvényesek.

Ha $\bar{r}$ valamely P pontból egy $\bar{c}$ (kötött) vektor hatásvonalának Q pontjába mutató vektor (68. ábra), akkor $\bar{c}$ vektor P-re vonatkozó nyomatékán a következő vektort értjük:

$$\bar{M}_P^{\bar{c}} = \bar{r} \times \bar{c}$$

(nem mindig szükséges jelölni, hogy melyik vektor nyomatékaról van szó, sőt néha a nyomatékvonatkoztatási pontot sem tüntetjük fel indexként, egyszerűen csak az $\bar{M}$ jelölést alkalmazzuk).

Az $\bar{M}_P^{\bar{c}}$ vektor neve nyomatékvektor. Jellemzői:

- állása: merőleges a P, $\bar{c}$ síkra,
- nagysága: $|\bar{r}||\bar{c}| \cdot \sin \varphi$ (φ : az $\bar{r}, \bar{c}$ vektorok által bezárt szög)
- iránya: $\bar{r}, \bar{c}, \bar{M}_P^{\bar{c}}$ jobbrendszeret alkot.

A 68. ábra (mely a koordináta – rendszert nem tünteti fel) alapján rögtön belátható, hogy a nyomatékvektor hossza korábbi definícióknak megfelelően "erőörök · erő".

Ugyanis

$$|\bar{M}_P| = |\bar{r}||\bar{c}| \sin \varphi = |\bar{r}||\bar{c}| [\sin / 180^\circ - \varphi / = k] |\bar{c}|.$$

Könnyen belátható az is, hogy a nyomatékvektor független a Q pontnak $\bar{c}$ hatásvonalán elfoglalt helyétől.

Tétel. Egy vektornak egy pontra vonatkozó nyomatéka egyenlő tetszőleges két összetevőjének nyomatékával ugyanazon pontra (nyomaték tétel néven találkoztunk már ezzel a tétellel).

Bizonyítás. Legyen $\bar{c} = \bar{c}_1 + \bar{c}_2$.

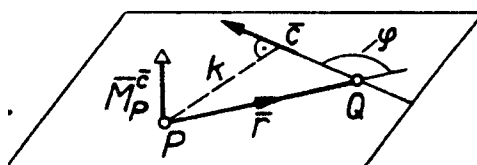
A tetszőleges O pontot válasszuk egy koordináta – rendszer kezdőpontjául. E rendszerben a három vektor közös kezdőpontja legyen $\bar{r}$. Ekkor

$$M_O^{\bar{c}_1} + M_O^{\bar{c}_2} = \bar{r} \times \bar{c}_1 + \bar{r} \times \bar{c}_2 = \bar{r} \times (\bar{c}_1 + \bar{c}_2) = \bar{r} \times \bar{c} = \bar{M}_O^{\bar{c}}.$$

ERŐPÁR NYOMATÉKVEKTORA

Az erőpár nyomatéka –mint láttuk- síkjának bármely pontjára egyenlő. Ezzel az értékkel, az erőpár nyomatékával jellemeztük az erőpárt a síkbeli sztatikában.

Térbeli erőpárok jellemzésére hasonló lehetőség kínálkozik.



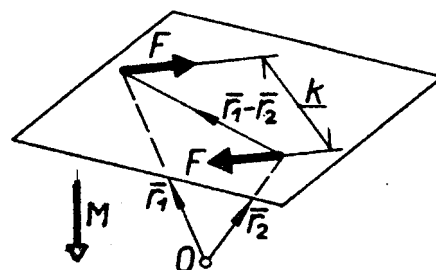
68. ábra

Tétel. Az erőpár nyomatéka a tér tetszőleges pontjára egyenlő.

Bizonyítás. Legyen a 69. ábrán fel – nem tüntetett koordináta – rendszerre vonatkozólag az erőpár erőinek támadáspontjába mutató két helyvektor $\bar{r}_1$ és $\bar{r}_2$.

Ekkor az erőpárnak az O pontra vonatkozó nyomatéka:

$$\bar{M}_O = \bar{r}_1 \times \bar{F} + \bar{r}_2 \times (-\bar{F}) = \bar{r}_1 \times \bar{F} - \bar{r}_2 \times \bar{F} = (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times \bar{F}.$$



Ez olyan vektor, mely

- merőleges az erőpár síkjára,
- hossza $k \cdot F$ /k az erőpár karja/,
- $(\bar{r}_1 - \bar{r}_2), \bar{F}, \bar{M}_O$ jobbrendszeret alkot.

69. ábra

Mint látjuk, az $\vec{M}_O$ vektor független az O pont választásától, csak az erőpárra jellemző.

Valóban: $\vec{M}_O$ hossza az erőpár skaláris nyomatékának abszolút értéke, a vektor állása meghatározza az erőpár síkjának állását, a vektor nyílából pedig az erőpár által megszabott forgásmódra következtethetünk. Jogos tehát, az erőpár matematikai jellemzőjének tekinteni az $\vec{M}_O$, illetve egyszerűbben $\vec{M}$ vektort, melyet a továbbiakban az erőpár nyomatékvektorának nevezünk.

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt.

Tétel.

Az egyenlő nyomatékvektorú térbeli erőpárok sztatikailag egyenértékűek.

Vagyis az erőpár nem csupán síkjában mozgatható el és alakítható át, hanem síkjával együtt is elmozdítható, ha a sík állása változatlan marad.

Más szóval: a nyomatékvektornak egyedül az állása és iránya lényeges, támadásponthoz, sőt hatásvonalhoz sincs kötve, vagyis szabad vektor. Megjegyezzük, hogy ábráinkon a nyomatékvektort – könnyebb megkülönböztetés végett – „üres végű” nyíllal jelöljük.

Hogy a nyomatékot valóban vektornak tekinthessük, még igazolandó a következő

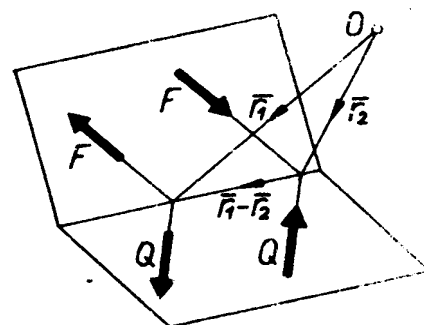
Tétel: ha egy F alapú erőpár nyomatékvektora $\vec{M}^F$, egy Q alapú erőpáré $\vec{M}^Q$, akkor a két erőpárt összegezve olyan erőpárt kapunk, melynek nyomatékvektora

$$\vec{M}^F + \vec{M}^Q.$$

Bizonyítás.

Azzal az esettel foglalkozunk, mikor az erőpárok síkjai metszik egymást (70. ábra).

Az erőpárok – megengedett átalakításokkal – olyan helyzetbe hozhatók, hogy a megfelelő alapok hatásvonalai metszik egymást. Ekkor a közös metszéspontú, $\vec{F}, \vec{Q}$ illetve $-\vec{F}, -\vec{Q}$ vektorú alapokat összegezve valóban két ellentétes vektorú, nem közös hatásvonalú erőt, vagyis erőpárt kapunk (ezt az ábra nem tünteti fel). Ennek az erőpárnak egy tetszőleges O pontra vonatkozó nyomatéka az ábra jelöléseivel:

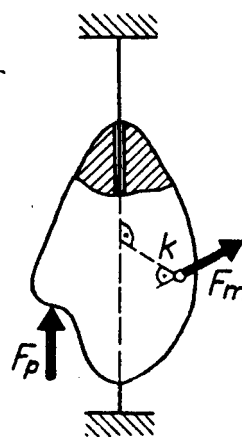


70. ábra

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times (\vec{F} + \vec{Q}) + \vec{r}_2 \times (-\vec{F} - \vec{Q}) = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_1 \times \vec{Q} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) + \vec{r}_2 \times (-\vec{Q}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{Q} = \vec{M}^F + \vec{M}^Q.$$

TENGELYRE VONATKOZÓ NYOMATÉK

Tekintsük a 71. ábrán vázolt kialakítású merev testet, mely egy fix tengely körül elforgatható és elcsúszatható a test súlyától eltekintünk. Tapasztalatunk szerint egy, a tengellyel párhuzamos hatásvonalú F_p erő hatására a test a tengely mentén eltolódik, de nem fordul el.



71. ábra

Ugyancsak a tapasztalat azt mutatja, hogy a tengelyre merőleges hatásvonalú, de a tengelyt nem metsző F_m erő hatására a test a tengely körül elfordul, de nem tolódik el.

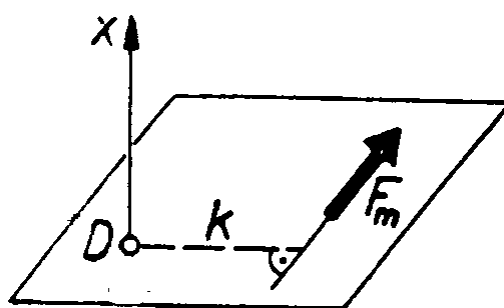
Ha az F_m erő hatásvonalának a forgástengelytől mért távolsága k , a forgatóhatás mértékének a kF_m szorzatot tekintjük. A forgatóhatás pontosabb jellemzése céljából a forgástengely szimmetriavonalát lássuk el irányítással, vagyis a test elfordulását matematikai értelemben vett tengely körül vizsgáljuk. A forgást akkor tekintjük pozitívnak, ha a tengely irányával szembenézve az F_m erő az órajárással ellentétes forgásmódot szab meg.

Ekkor az F_m erőnek a felvett – mondjuk x – tengelyre vonatkozó nyomatéka (72. ábra):

$$M_x = \pm kF_m.$$

Nilvánvaló, hogy $|M_x| = |\overline{M}_D|$, ahol D az x tengely és az F_m erő hatásvonalán áttett, x -re merőleges sík dőléspontja. A tengelyre vonatkozó nyomaték skalár.

Ha az erő a forgástengelyhez képest általános helyzetű, akkor a tengelyre vonatkozó nyomatékokat a következőképpen értelmezzük: áttesszünk az erő hatásvonalán egy, a tengellyel párhuzamos síkot (73. ábra) és felbontjuk F -et a síkban F_p és F_m összetevőkre (az ábra F -et nem tünteti fel).



72. ábra

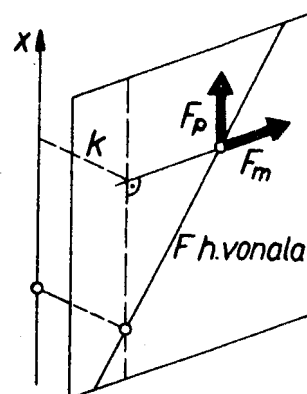
Az utóbbi összetevőnek az x tengelytől mért k távolságával a tengelyre vonatkozó nyomaték: $M_x = \pm kF_m$.

Az előjelet illetőleg a fentebb mondottak érvényesek.

Amint az ábra alapján könnyen belátható, a tengelyre vonatkozó nyomaték független az erő támadáspontjának a hatásvonalon elfoglalt helyzetétől. Ugyanis k a támadáspont helyzetétől függetlenül egyenlő a hatásvonal és a tengely normál transzverzálisának hosszával, F_m pedig csak az erő és a tengely hajszálszögétől függ adott F esetén.

Végül rámutatunk a tengelyre és a pontra vonatkozó nyomaték közötti kapcsolatra.

Számítsuk ki a tér $\vec{r}(x, y, z)$ helyvektorú pontjában ható, $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ vektorú erőnek a koordináta-rendszer kezdőpontjára vonatkozó nyomatékát (74. ábra)!



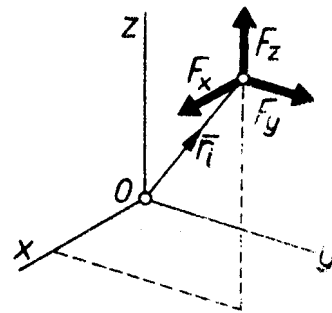
73. ábra

$$\begin{aligned}\overline{M}_O &= \overline{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(yF_z - zF_y) + \bar{j}(zF_x - xF_z) + \bar{k}(xF_y - yF_x).\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a zárójelben levő mennyiségek rendre a következők: M_x, M_y, M_z .

Tehát $\overline{M}_O = M_x \bar{i} + M_y \bar{j} + M_z \bar{k}$.

Vagyis az O pontra vonatkozó nyomatékvektor komponensei a tengelyre vonatkozó nyomatékok. Nyilván $\overline{M}_O$ pontosan akkor zérus, ha $M_x = M_y = M_z = 0$.



74. ábra

I. 14. Térbeli általános erőrendszer

EREDŐ

A térbeli erőrendszer jellemzője: hatásvonalai nincsenek közös síkban.

A térbeli erőrendszert kevésbé részletesen tárgyaljuk, mint a síkbeli erőrendszert. Nem térünk ki külön a közös metszéspontú térbeli erőrendszerre, melynek lényege: a hatásvonalaknak van közös pontjuk, de nincs közös síkjuk; sem a térbeli párhuzamos erőrendszerre, mely párhuzamos hatásvonalú, de nem egy síkban lévő erőkből áll.

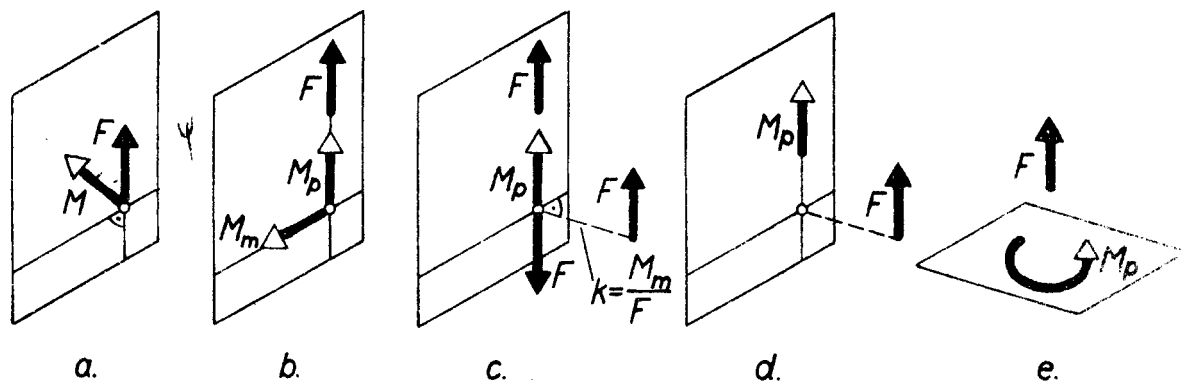
Rögtön a legáltalánosabb esettel, a térbeli általános erőrendszerrel foglalkozunk, vagyis olyan térbeli erőrendszerrel, mely nem csupa közös metszéspontú, vagy kizárólag párhuzamos erőkből áll. Az erőrendszer eredőjéhez pontosan olyan megfontolással juthatunk, mint amelyet a síkbeli általános erőrendszernél alkalmaztunk az 52. ábrával kapcsolatban (nincs szükség új ábrára, ha az 52/a. ábra erőit most térbeli általános erőrendszernek tekintjük). Az adott térbeli erőrendszer minden F_i erőéhez hozzárendelünk egy tetszőlegesen felvett pontból kiinduló $\overline{F}_i$ és $-\overline{F}_i$ vektorú erőt. Ezt a hozzárendelést az erőrendszer minden elemére elvégezve egy közös metszéspontú térbeli erőrendszert és olyan erőpárokat nyerünk, melyek a felvett ponton átmenő különböző síkokban helyezkednek el. A közös metszéspontú erők eredőjét és az erőpárok eredő erőpárját előállítva, végeredményben az eredeti erőrendszert a vele egyenértékű, egyetlen erőből és egyetlen erőpárból álló rendszerre alakíthatjuk. Hogy a síkbeli általános erőrendszernél követett úthoz képest most mi az új, azt a nyomatékvektor fogalmának felhasználásával könnyen beláthatjuk.

Síkbeli erőrendszer esetén azt mondjuk, hogy az egyenértékű átalakítás egy erőre és egy rá merőleges nyomatékvektorú erőpárra vezetett, vagyis az erő és az erőpár egy síkban volt. Térbeli erőrendszer esetén az erő vektora és a nyomatékvektor általában nem merőleges egymásra.

Természetesen itt is megtörténhet, hogy $\vec{F}$ és $\vec{M}$ bármelyike esetleg zérusvektor.

A térbeli általános erőrendszer lehetséges erőinek áttekintése előtt részletesen meg kell vizsgálni az egymáshoz képest általános helyzetű $\vec{F}$ és $\vec{M}$ vektorok eredőjét, hiszen ezzel a feladattal korábban nem találkoztunk.

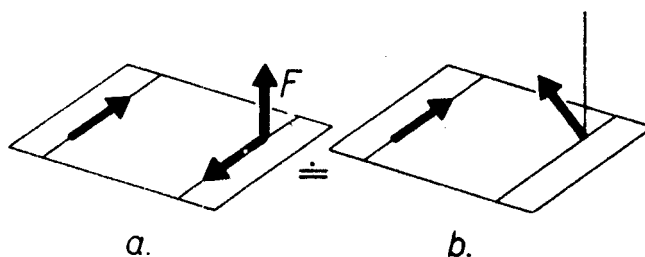
Az általános eset a 75. ábrasorozatból érthető meg.



75. ábra

A 75/a. ábrán adott $\vec{M}$ nyomatékvektort felbontjuk az F vektorával egyállású $\vec{M}_p$ és arra merőleges $\vec{M}_m$ összetevőre (75/b. ábra). $\vec{M}_m$ helyettesíthető a 75/c. ábrán feltüntetett F alapú erőpárral. Ha most az egyensúlyban lévő $\vec{F}, -\vec{F}$ rendszert elhagyjuk, a 75/d. ábrán látható, egyetlen erőből ($\vec{F}$) és a rá merőleges síkú $\vec{M}_p$ nyomatékvektorú erőpárból álló rendszerhez, erőcsavarhoz jutunk. A 75/e. ábra csupán az erőcsavar szemléletesebb ábrázolása.

Ha az $\vec{M}_p$ erőpár egyik alapját az $\vec{F}$ erővel összegezzük (ez ∞ sokféleképpen történhet), akkor két kitérő egyenesen ható erőből álló térbeli erőrendszert, társerőket kapunk (76. ábra). Az egymásra merőleges társerőket erőkeresztnek nevezik.



76. ábra

Egy erőcsavar végtelen sokféleképpen alakítható erőkeresztté.

Most már áttekinthetjük a térbeli erőrendszerek lehetséges eredőit. Ha az egyenértékű átalakítás után nyert $\vec{F}, \vec{M}$ vektorok által bezárt szög φ , akkor a lehetséges esetek a következők:

	$\bar{F} \neq 0, \varphi \neq 90^\circ$	$\bar{M} \neq 0, \varphi = 90^\circ$	$\bar{F} \neq 0, \bar{M} = 0$	$\bar{F} = 0, \bar{M} \neq 0$	$\bar{F} = 0, \bar{M} = 0$
Az erőrendszer eredője:	erőcsavar	egyetlen erő	egyetlen erő	egyetlen erőpár	zéruserő / egyensúly van

A lényegileg különböző esetek száma tehát 4.

Az eredő gyakorlati meghatározása az $\bar{F}$ és $\bar{M}$ vektorok kiszámítását igényli. Az utóbbi vektor függ attól, melyik pontra redukáljuk az erőrendszert. Ha ez a pont a koordináta – rendszer kezdőpontja, akkor $\bar{M} = \bar{M}_O$, melynek komponensei a tengelyekre vonatkozó nyomatékok. Ezek számítását az előző tárgypontban láttuk.

Az $\bar{F} = F_x \bar{i} + F_y \bar{j} + F_z \bar{k}$ vektor komponensei

$$F_x = \sum F_{ix} = \sum F_i \cos \alpha_i, \quad F_y = \sum F_{iy} = \sum F_i \cos \beta_i, \quad F_z = \sum F_{iz} = \sum F_i \cos \gamma_i$$

egyenletből számíthatók. Itt $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ az F_i erőnek a tengelyekkel bezárt szöge (77. ábra).

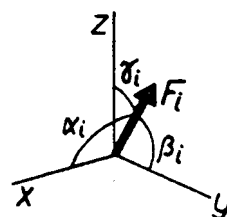
$\bar{F}$ abszolút értéke:

$$|\bar{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

$\bar{F}$ és a tengelyek hajlásszögére egyrészt fennáll a

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F},$$

másrészt a $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ összefüggés.



77. ábra

A fentiek alapján az $\bar{F}$ és $\bar{M}$ vektorokat meg tudjuk határozni. További részletekkel nem foglalkozunk.

Megemlítjük még, hogy grafikus módszerek a térbeli erőrendszerekkel kapcsolatban kevésbé használatosak, mint a síkbeliekénél.

A térbeli erőrendszert – mint láttuk – teljesen meghatározza a redukálás során nyert $\bar{F}$ és $\bar{M}$ vektor. E tény és az erőrendszerek egyenértékűségének fogalma alapján a következő megállapítást tehetjük: két erőrendszer – például az I és a II rendszer – sztatikailag egyenértékű, ha bármely pontra

$$\bar{F}_I = \bar{F}_{II} \text{ és } \bar{M}_I = \bar{M}_{II}.$$

Megmutatható, hogy ha egy pontra teljesül a fenti egyenlőség, akkor minden pontra teljesül.

EGYENSÚLY

A térbeli általános erőrendszer egyensúlyának feltétele az eddigiek alapján könnyen megfogalmazható. Tetszőleges P pontra $\bar{F} = 0$ és $\bar{M}_P = 0$. Megmutatható, hogy ha egy pontra

ez teljesül, akkor tetszőleges egyéb pontra is teljesül. Redukálási pontul a koordináta - rendszer kezdőpontját véve, az egyensúly szükséges és elégséges feltétele tehát így is megfogalmazható:

$$\bar{F} = \sum \bar{F}_i = 0, \quad \bar{M} = \sum (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) = 0.$$

E két vektoregyenletnek megfelelő 6 skaláregyenlet a következő:

$$\begin{aligned} F_x &= \sum F_{ix} = 0, & M_x &= \sum (yF_z - zF_y) = 0, \\ F_y &= \sum F_{iy} = 0, & M_y &= \sum (zF_x - xF_z) = 0, \\ F_z &= \sum F_{iz} = 0, & M_z &= \sum (xF_y - yF_x) = 0. \end{aligned}$$

Szavakban: az egyensúly szükséges és elégséges feltétele az, hogy az erőrendszernek a tengelyekre (bármely tengelyre) vonatkozó komponensösszege és nyomatékösszege zérus legyen. Feladatok megoldásában különösen a nyomatékegyenletek alkalmazhatók előnyösen.

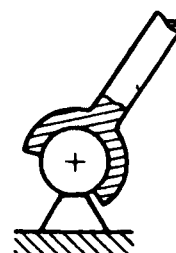
A megfelelő nyomatékvonatkoztatási tengely ügyes megválasztásával gyakran egyenletrendszer felírása nélkül juthatunk az ismeretlenekhez. Amint látható, az egyensúlynak hat egymástól független feltétele van térbeli általános erőrendszerrel terhelt test esetén. Ha az egyensúlyozó erőrendszert (reakciók) csupán egyensúlyi megfontolásokkal nem lehet meghatározni, a feladat sztatikailag meghatározhatatlan.

KÉNYSZEREK

Felsorolunk néhányat a térbeli sztatika lehetséges kényszerei közül.

Gömbcsukló (78. ábra). Lényege: az aljzat megfelelően kialakított, gömbfelületekkel határolt része a testnek kialakított gömb alakú fészekbe illeszkedik.

A gömbcsukló a test olyan mozgásait engedi meg, melyeknél a test pontjainak a gömbközponttól mért távolsága változatlan marad. Sztatikai szempontból olyan reakció – erőrendszert jelent, melynek eredője egyetlen erő. Ennek hatásvonalát átmegy a gömbközponton, a reakcióerő három komponenséről továbbiakat csak a testre ható erőrendszer ismeretében mondhatunk.

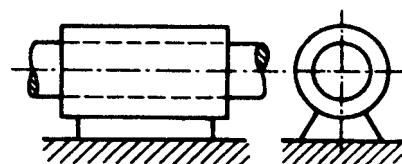


78. ábra

Hengergyűrű (79. ábra). A test hengeres része csőszerű rögzítő elembe illeszkedik.

Ilyen kialakítás a testnek a hengergyűrű tengelye menti eltolódását és elfordulását engedi meg.

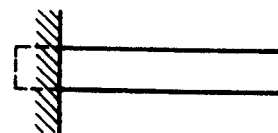
A hengergyűrű által gyakorolt hatás a következő lehet: a tengelyre merőleges erő, a tengelyre merőleges nyomatékvektorú erőpár, illetve ezek kombinációja.



79. ábra

Befogás

Olyan rögzítésmódot jelent, mely a test minden mozgáslehetőségét megszünteti. Megvalósítható például úgy, hogy a test egy részét a 80. ábrán látható módon befalazzuk.



80. ábra

Sztatikai szempontból a befogás olyan reakció – erőrendszert jelent, mely általános esetben erőcsavarral egyenértékű. Az erőcsavar hat adataról (három erőkomponens és három nyomaték-komponens) közelebbit csak a terhelő erőrendszer ismeretében mondhatunk.

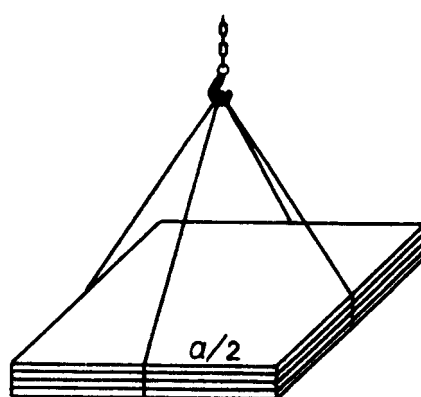
8. Példa

Forgácslapköteget akarunk daruval felemelni a 81. ábrán látható módon.

A forgácslapköteg súlya $G = 10\text{kN}$, az emeléshez használt kötél teherbírása 8kN . A lapok négyzet alakúak, $a = 2\text{m}$.

Kérdés: a vonóhorog a forgácslapköteg fölött milyen m magasságban lehet minimálisan, ha azt akarjuk, hogy a kötélagakban legfeljebb 7kN erő ébredjen?

Könnyen belátható ugyanis, hogy ha $m \rightarrow 0$, a kötélerő $\rightarrow \infty$.



81. ábra

Megoldás.

Vizsgáljuk a vonóhorog egyensúlyát!

Ha a vonóhorog méreteitől és súlyától eltekintünk, a tartókötelek súlyát és vastagságát szintén elhanyagoljuk, akkor a vonóhorogra ható erők egy térbeli, közös metszéspontú erőrendszernek tekinthetők.

Ezek az erők: G , a vonólánc hatása a vonóhorogra, továbbá szimetriaviszonyokból következőleg négy egyenlő K kötélerő.

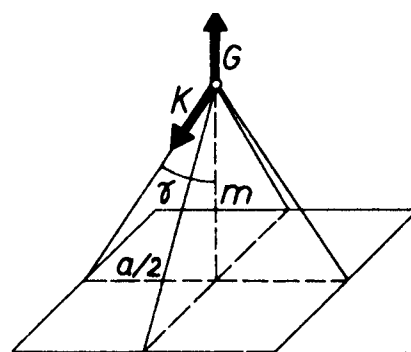
Mivel egyensúly van, a függőleges z tengelyre felírhatjuk a 82. ábra alapján:

$$\sum F_z = G - 4K \cos \gamma = 0, \quad \text{ahol}$$

$$\cos \gamma = \frac{m}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{G}{4K} = \frac{m}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2}}, \quad m = \frac{Ga}{2\sqrt{16K^2 - G^2}}.$$

$$\text{Ha } K=7\text{ kN}, \quad m = \frac{10.2}{2\sqrt{16 \cdot 7^2 - 10^2}}, \quad \underline{m = 0,38\text{m}}.$$



82. ábra

9. Példa

Egy vízszintes síkban elhelyezkedő tört tengelyű rúd egyik vége vízszintes és függőleges sík területekre támaszkodik, másik vége csődarabba nyúlik (83. ábra). A szerkezetet F nagyságú erőkből álló erőkereszt terheli.

Meghatározandók a reakcióerők.

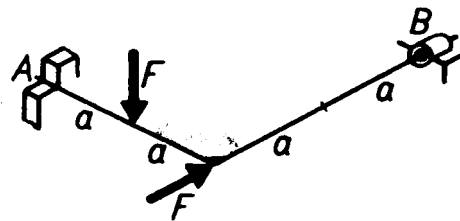
Megoldás.

Vegyünk fel egy alkalmas koordináta rendszert és ábrázoljuk a reakcióerőrendszer erő- és nyomaték összetevőit (84. ábra)!

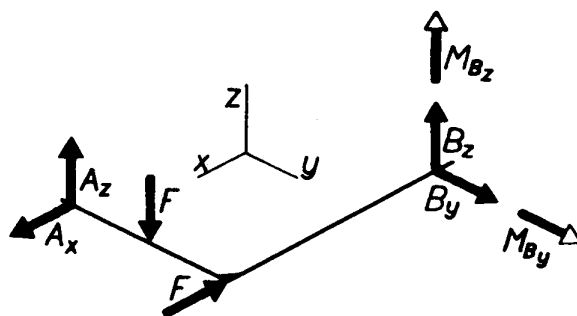
Az A pontban a támasz kialakítása olyan, hogy az y irányú reakcióerő nem ébredhet, A_x, A_z különbözhet zérustól.

A B-beli megfogás eleve biztosítja, hogy $B_x = 0$ és $M_x = 0$.

Most már alkalmazhatjuk az egyensúlyi egyenleteket.

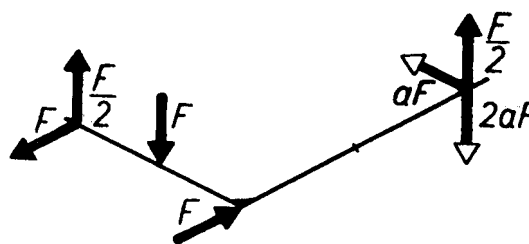


83. ábra



84. ábra

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= A_x - F = 0, & A_x &= F. \\ \sum F_{iy} &= B_y = 0, & B_y &= 0. \\ \sum M_{ix} &= -aF + 2aB_z = 0, & B_z &= \frac{F}{2}. \\ \sum F_{iz} &= A_z - F + \frac{F}{2} = 0, & A_z &= \frac{F}{2}. \\ \sum M_{iy} &= M_y + 2a\frac{F}{2} = 0, & M_y &= -aF. \\ \sum M_i &= 2aF + M_z = 0, & M_z &= -2aF. \end{aligned}$$



85. ábra

A 85. ábra a testre ható aktív és reakcióerőket (erőpárokat) együtt szemlélteti. Tanulságos az erőrendszert egyenértékű egyszerűbb erőrendszerekké alakítva is belátni, hogy a vázolt erőrendszer egyensúlyi erőrendszer.

I.15. Megoszló erők

FAJLAGOS ERŐ

Sok esetben a valóságos mechanikai viszonyok pontatlan leírására vezet a koncentrált erő fogalmának alkalmazása. Ugyanis nem mindig vehetjük úgy, hogy a hatás elhanyagolható felszínű felületdarabon érvényesül.

A testek egymásra gyakorolt hatása olykor egy kis szélességű, de hosszú sávon adódik át - gondoljunk egy fal által a talajra gyakorolt hatásra – ilyenkor vonal mentén megoszló erőről vagy erőrendszerről beszélünk.

Hasonló fogalom a felületen megoszló erő. Példa rá az a hatás, melyet egy folyadékkal telt tartály falára a folyadék gyakorol.

Szó lehet térrészen megoszló erőről (térfogati erő, tömegelő). Erre példa a súlyelő, mely egy test által elfoglalt térrész valamennyi pontjában hat.

A megoszló erők jellemzését felületdarabon megoszló erő esetén mutatjuk be. Ha például a (vízszintesnek képzelt) talaj egy A területű darabját állandó vastagságú homokréteg fedi, akkor feltehetjük, hogy a terhelt terület minden pontján azonos hatás érvényesül, melynek iránya a talaj síkjára merőleges.

E hatás jellemezhető az egységnyi felületdarabra jutó terheléssel. Ha a teljes homokmennyiség súlya F, a terhelt felületdarab felszíne A, akkor az $\frac{F}{A}$ hányados egyértelműen jellemzi a megoszló erőrendszert.

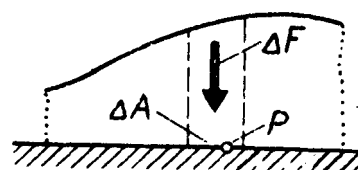
Ha a homokréteg vastagsága változó, akkor egyetlen hányadossal nem jellemezhető a terhelés, hiszen nyilvánvaló, hogy pontonként különbözhet a talajt érő hatás.

Ilyenkor a tetszőleges P pontban érvényes terhelés jellemzésére kijelöljük a terhelt idom egy olyan ΔA területű darabját, mely p-t tartalmazza (86. ábra).

Ha a ΔA -ra jutó terhelés ΔF , akkor a $\frac{\Delta F}{\Delta A}$ hányados

bizonyos mértékben jellemzi a P pontban érvényesülő hatást, márpedig annál inkább, minél kevésbé változik a ΔA alapú „homok-oszlop” magassága. Ha $\Delta A \rightarrow 0$, akkor általában az oszlop-magasság változása is zérushoz tart.

Kézenfekvő tehát, hogy a tetszőleges P pontban érvényes hatás jellemzésére az



86. ábra

$$f = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad \left(\frac{N}{m^2} \right)$$

Határértéket, a fajlagos erőt (fajlagos teher, teherintenzitás (adjuk meg) amennyiben a határérték létezik).

A felületdarabon megoszló erőrendszer ismeretéhez minden pontban ismerni kell a fajlagos erőt és a hatás irányát.

* mégpedig úgy, hogy a ΔA területű síkidom legnagyobb mérete is zérushoz tart.

Hasonlóképpen értelmezzük a vonal mentén, illetve térrészen megoszló terhelés esetén is a fajlagos erőt:

$$f = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta l} \quad \left(\frac{N}{m} \right), \text{ illetve } f = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta V} \quad \left(\frac{N}{m^3} \right).$$

Itt Δl és ΔV a kérdéses pontot tartalmazó vonaldarab hossza, illetve térrész térfogata.

MEGOSZLÓ PÁRHUZAMOS ERŐRENDSZER

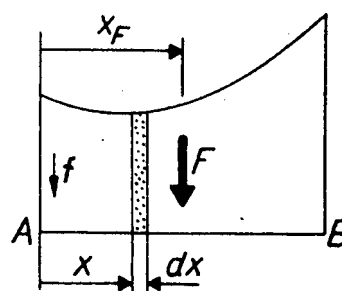
A fentiekben hallgatólagosan feltettük, hogy a terhelt idom (felület, vonal, térrész) minden pontjában azonos a hatás iránya. Mivel rendszerint valóban ez a helyzet, a továbbiakban csak párhuzamos megoszló erőrendszerekkel foglalkozunk, melyek ismeretéhez egy irány és a fajlagos erő (mint a hely függvénye) megadása szükséges.

A következőkben vonal mentén megoszló erőrendszerekre teszünk néhány megállapítást, melyek értelemszerűen felületen, vagy térrészen megoszló erőrendszerekre is átvihetők.

Legyen adott az AB szakasz minden pontjában a fajlagos erő. Vagyis az A pontból mért x koordináta függvényében ismerjük a fajlagos erőt (az $f=f(x)$) függvényt és a terhelés irányát (87. ábra). A fajlagos erő függvényének grafikonja a terhelésábra. A terhelésábrával együtt feltüntetjük a terhelés irányát jellemző nyilat is.

Az $f(x)$ függvény ismeretében az AB szakaszra jutó teljes terhelés meghatározható. A dx hosszúságú vonaldarabra jutó erő

$$dF = f / x / dx,$$



a teljes AB szakaszra jutó terhelés:

87. ábra

$$F = \int_A^B dF = \int_0^l f / x / dx.$$

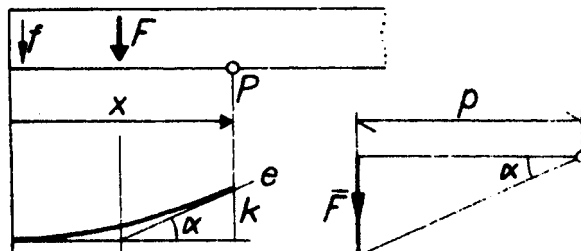
Más szóval: a terhelésábra és a terhelt vonaldarab közé eső idom területe a teljes terheléssel (a „terület” itt úgy értendő, hogy távolságot szorzunk erő) távolság dimenziójú mennyiséggel).

A megoszló párhuzamos erőrendszer eredőjének helyét így számíthatjuk: ha x_F az eredő koordinátája, akkor

$$\int_0^l x f / x / dx = x_F F = x_F \int_0^l f / x / dx; \quad x_F = \frac{\int_0^l x f / x / dx}{\int_0^l f / x / dx}.$$

A megoszló erők eredője lehet zéruserő és erőpár is. A következőkben szükség lesz a megoszló erők valamely pontra vonatkozó nyomatékának meghatározására.

Foglalkozzunk az egyenletesen megoszló párhuzamos erőrendszer esetével, melynél $f = \text{const}$. Terhelésábráját a terhelte vonallal párhuzamos szakasz v. félegyenes (egyenes) határolja (88. ábra).



88. ábra

Határozzuk meg a terhelte vonalon felvett P pontra a tőle balra lévő megoszló erő nyomatékát. Vagyis M_p -t keressük x függvényében. Ez a nyomaték az x hosszra megoszló erők F eredőjének nyomatékával egyenlő:

$$M_p / x / = \frac{x}{2} F = \frac{x}{2} x f = \frac{f}{2} x^2.$$

A nyomaték x függvényében parabolikusan változik.

Grafikusan is könnyen meghatározható a nyomaték: az I. 7. – ben látott szerkesztést alkalmazzuk az $F = x f$ erőre. $M_p / x / = k p$.

A nyomatéki metszések k / végpontjai parabolán vannak.

Ez így is belátható:

$$M_p / x / = \frac{f}{2} x^2 = p k, \quad k = \frac{f}{2p} x^2.$$

Az α hajlásszögű e egyenes a parabola érintője, hiszen

$$\frac{dk}{dx} = \frac{fx}{p} = \frac{F}{p} = \tan \alpha.$$

10. Példa

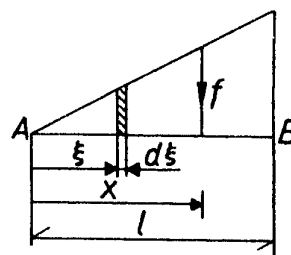
Az AB szakaszon lineárisan változó megoszló erő működik, vagyis $f / x / = C x$ (89. ábra).

A teljes terhelés nagysága F , $\overline{AB} = l$.

Meghatározandó a C állandó, valamint $M(x)$ és x hosszra eső terhelés $T(x)$ függvénye.

Megoldás.

A terhelésábra alatti terület a teljes terheléssel egyenlő. A B pontbeli fajlagos erő:



$$f_B = Cl, \text{ így}$$

$$\frac{1}{2}l \cdot Cl = F, \quad \underline{C = \frac{2F}{l^2}}.$$

89. ábra

$$M/x/ = \int_0^x f(\xi) d\xi (x - \xi) = \int_0^x \frac{2F}{l^2} \xi (x - \xi) d\xi = \frac{2F}{l^2} \int_0^x (x\xi - \xi^2) d\xi = \frac{2F}{l^2} \left[x \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} \right]_0^x,$$

$$\underline{M/x/ = \frac{2F}{l^2} \frac{x^3}{3}}.$$

$$T/x/ = \int_0^x f(\xi) d\xi = \int_0^x \frac{2F}{l^2} \xi d\xi = \frac{2F}{l^2} \left[\frac{\xi^2}{2} \right]_0^x, \quad \underline{T/x/ = \frac{Fx^2}{l^2}}.$$

Határozzuk meg az erőrendszer eredőjének helyét is!

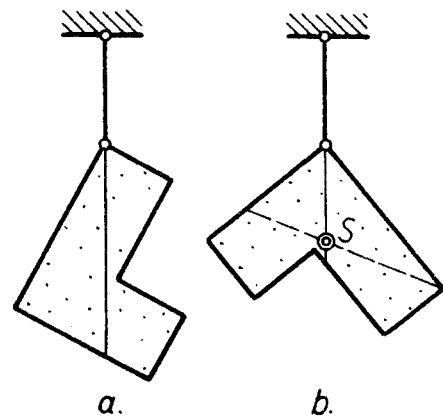
$$x_F = \frac{\int_0^l x f/x/ dx}{\int_0^l f/x/ dx} = \frac{M/l/}{T/l/} = \frac{2Fl^3}{3l^2} \frac{l^2}{Fl^2}, \quad \underline{x_F = \frac{2}{3}l}.$$

I.16. Súlypont

A SÚLYPONT FOGALMA

Egy lemezszerű súlyos testet formál segítségével felfüggesztve (90. ábra) azt tapasztaljuk, hogy a test bizonyos idő elteltével tartós nyugalomba jut. Ekkor a lemezre ható megoszló súlyerő-rendszer és a fonal által gyakorolt erő egyensúlyi erőrendszert alkot. A fonálerő hatásvonala most egybeesik a súlyerőrendszer eredőjének hatásvonalával. Ez az egyenes a lemez egy súlyvonala. Más felfüggesztés esetén más súlyvonalat kapunk.

Hasonló fogalom háromdimenziós testek esetén a súlysík.



90. ábra

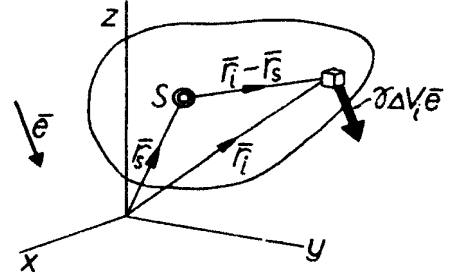
A felfüggesztett testre ható súlyerőrendszer nyomatéka a súlyvonal bármely pontjára zérus. A tapasztalat szerint egy testet bárhogyan függesztünk is fel, a súlyvonalak mindig egy pontban metsződnek. Ez azt is jelenti, hogy mindig létezik egy olyan - a testhez rögzített - pont, melyre a súlyerőrendszer nyomatéka (a test bármely helyzetében) zérus. Ez a pont a test súlypontja. A súlyponton átmenő bármely egyenes, illetve sík súlyvonal, illetve súlysík. A továbbiakban homogén anyagú testekkel foglalkozunk, melyeknél a test tetszőleges ΔV térfogatú és ΔG súlyú darabjára $\frac{\Delta G}{\Delta V}$ állandó. Pontosabban: a test bármely pontjában a

$$\gamma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta V} = \frac{dG}{dV} \text{ mennyiség, a fajsúly, állandó.}$$

Próbáljunk most egy γ fajsúlyú testhez olyan pontot találni, melyre a súlyerők nyomatékösszege tetszőleges felfüggesztés, vagyis bármely súlyerő – irány esetén zérus. Osszuk fel a testet

ΔV_i / $i=1,2,\dots,n$ / térfogatú részekre (91. ábra).

A ΔV_i térfogatú részre ható súlyerő nagysága $\Delta V_i \gamma$, irányát egy tetszőleges $\vec{e}$ egységvektor jelöli ki. Feltehető, hogy a test minden részére egyidejűleg azonos irányú erő hat.



91. ábra

Legyen a keresett S súlypont helyvektora $\vec{r}_s$, az i –edik testrészre ható erő vektora $\gamma \Delta V_i \vec{e}$, az S-ből az i –edik elemhez vezető vektor $\vec{r}_i - \vec{r}_s$. Ekkor a súlyerők S –re vonatkozó nyomatéka:

91. ábra

$$\vec{M}_S = \sum [(\vec{r}_i - \vec{r}_s) \times \gamma \Delta V_i \vec{e}] = \sum [(\vec{r}_i \gamma \Delta V_i - \vec{r}_s \Delta V_i \gamma) \times \vec{e}] = 0.$$

A gömbölyű zárójelben lévő vektor és $\vec{e}$ szorzata zérus. Ez csak úgy lehetséges, hogy a két vektor párhuzamos egymással, vagy pedig a gömbölyű zárójelben lévő vektor zérus. Tekintve, hogy a különböző felfüggesztéseknek a súlyerőirányt megadó $\vec{e}$ vektor különböző iránya felel meg és a vektoriális szorzat mindig zérus, kell, hogy a gömbölyű zárójelben álló mennyiség legyen zérussal egyenlő, vagyis

$$\vec{r}_s = \frac{\sum \vec{r}_i \Delta V_i}{\sum \Delta V_i}.$$

Koordinátákban felírva:

$$x_s = \frac{\sum x_i \Delta V_i}{\sum \Delta V_i}, \quad y_s = \frac{\sum y_i \Delta V_i}{\sum \Delta V_i}, \quad z_s = \frac{\sum z_i \Delta V_i}{\sum \Delta V_i}.$$

A test adott felosztásához tehát található pontosan egy olyan S pont melyre a súlyerőrendszer nyomatékösszege zérus. Mint látható, homogén test esetén a fajsúly közömbös a súlypont helyzetének szempontjából.

Folytonos anyageloszlású testek (kontinuum) esetén a test tárgyalt felosztását minden határon túl kell finomítani úgy, hogy minden i –re $\Delta V_i \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ teljesüljön és a részek legnagyobb mérete is zérushoz tartson. Vagyis a súlypont – koordinátákat a következő képletekből számítjuk:

$$x_s = \frac{\int_{(V)} x dV}{\int_{(V)} dV}, \quad y_s = \frac{\int_{(V)} y dV}{\int_{(V)} dV}, \quad z_s = \frac{\int_{(V)} z dV}{\int_{(V)} dV}.$$

Az integráljel alatti /V/ arra utal, hogy a test egész térfogatára kiterjed az integrálás.

Lemezszerű testek esetében $\Delta V_i = c \Delta A_i$, ahol a c a lemeztvastagság, ΔA_i az i – edik lemezrész területe. Így a súlypont – koordináták:

$$x_s = \frac{\sum x_i \Delta A_i}{\sum \Delta A_i}, \quad y_s = \frac{\sum y_i \Delta A_i}{\sum \Delta A_i}, \quad z_s = \frac{\sum z_i \Delta A_i}{\sum \Delta A_i},$$

illetőleg

$$x_s = \frac{\int_{(A)} x dA}{\int_{(A)} dA} \quad \text{stb.}$$

Vonalszerű testek (huzal, cső) esetén $\Delta V_i = A \Delta s_i$, ahol A a vonalszerű test keresztmetszet területe, Δs_i az i – edik rész hossza.

A képletek most is hasonlóak, tehát például

$$x_s = \frac{\sum x_i \Delta s_i}{\sum \Delta s_i}, \quad \text{illetve} \quad x_s = \frac{\int x ds}{\int ds}.$$

SZTATIKAI NYOMATÉK

A súlypont - koordinátákat szolgáltató, matematikailag azonos felépítésű képletek számlálóiiban szereplő

$\sum x_i \cdot V_i, \dots$, illetve $\int x dV, \int x dA, \int x ds$ stb. mennyiséghez úgy jutunk, hogy a testek, síkidomok (felületek) vonalak részeinek térfogatát, területét (felszínét), hosszát szorozzuk a rész – idomban felvett pont koordinátájával, s az így nyert szorzatokat összegezzük (minden határon túl finomodó felosztás esetén). Az így nyert mennyiségek a sztatikai nyomatékok, vagy elsőrendű nyomatékok.

Beszélhetünk például egy testnek egy koordinátasíkra vonatkozó sztatikai nyomatékáról:

$s_{xy} = \int z dV$, vagy egy síkidomnak egy tengelyre vonatkozó sztatikai nyomatékáról:

$$s_x = \int y dA.$$

A sztatikai nyomaték pozitív, negatív előjelű és zérus is lehet. A definícióból következik, hogy egy alakzat sztatikai nyomatéka az alakzat részei sztatikai nyomatékainak összege.

Ha koordináta – rendszerünket az alakzat súlypontjában vesszük fel, a súlypont – koordináták zérusok. A súlypontképletek vizsgálatából kitűnik, hogy ez csak úgy lehetséges, hogy a megfelelő sztatikai nyomatékok zérussal egyenlők.

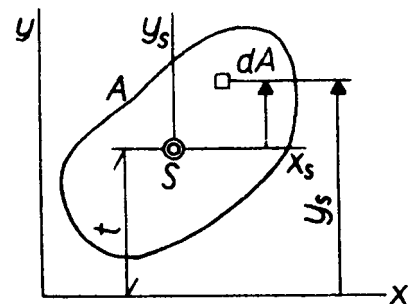
Egy síkidomnak egy tetszőleges x tengelyre vonatkozó s_x sztatikai nyomatékát a következő megfontolással is meghatározhatjuk.

Legyen az x tengellyel párhuzamos súlyponti tengely x_s .

Ekkor a 92. ábra alapján:

$$s_x = \int y dA = \int (t + y_s) dA = \int t dA + \underbrace{\int y_s dA}_0 = t \int dA = tA.$$

Felhasználtuk itt, hogy a súlyponton átmenő tengelyre a sztatikai nyomaték zérus.



92. ábra

Egy síkidom sztatikai nyomatéka tehát úgy is kiszámítható, hogy az idomot olyan részekre osztjuk, melyek súlypontjait ismerjük. Ezután képezzük a részterületek és súlyponttávolságaik szorzatösszegét.

Más szavakkal ez azt is jelenti, hogy sok esetben integrálszámítás nélkül meghatározható a sztatikai nyomaték $\sum y_i \Delta A_i$ alakú képletekkel is. Testekre, vonalakra hasonló érvényes.

SÚLYPONTMEGHATÁROZÁS

A súlypont felkeresésében gyakran hasznát vehetjük annak a ténynek, hogy egy alakzat (test, felület, síkidom, vonal)

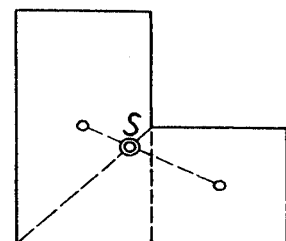
szimmetria – síkja	súlysík,
szimmetria – vonala	súlyvonal,
szimmetria – pontja	súlypont.

Néha a test, vagy síkidom alkalmas osztása, illetve a részek súlypontjainak ismerete teszi lehetővé az eredeti alakzat súlypontjának meghatározását. Például a 93. ábrán látható alakzat – egy négyzet negyedrésszének eltávolításával nyert idom- súlypontjához így juthatunk:

Az idom szimmetrikus, tehát egy súlyvonal már van (az eredeti négyzet átlója).

Az idom két, szimmetriaponttal bíró részre osztható. A szimmetriapontok összekötő egyenese szintén súlyvonal. A két ismert súlyvonal ismert metszéspontja a keresett súlypont. Oldjuk meg ugyanezt a feladatot számítással!

A koordináta – rendszert célszerű úgy megválasztani, ahogy a 94. ábrán látható.

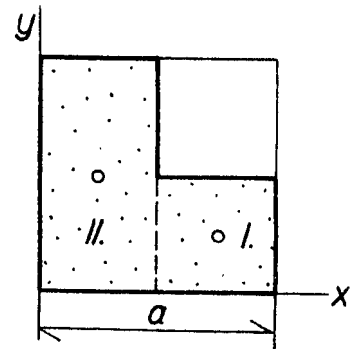


93. ábra

Már tudjuk, hogy $x_s = y_s$, tehát elegendő csak x_s meghatározásával foglalkozni.

$$x_s = \frac{\sum x_i \Delta A_i}{\sum \Delta A_i} = \frac{\sum y}{\sum \Delta A_i},$$

S_y előállítható a részidomok sztatikai nyomatékainak összegeként. Ha az idomot például az ábrán látható I és II részre osztjuk



94. ábra

$$s_y = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{3}{2}a + \frac{a^2}{2} \frac{a}{4}, \text{ így a súlypont koordináta}$$

$$x_s = \frac{\frac{a^2}{4} \frac{3}{2}a + \frac{a^2}{2} \frac{a}{4}}{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}}, \quad \underline{x_s = \frac{5}{12}a = 0,417a.}$$

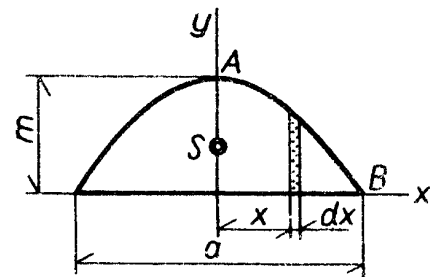
Az imént látott módszer gyakran alkalmazható. Egy megcsonkított idom (furat, üreg) esetén az eltávolított rész területe (illetve térfogata) negatív előjellel jön számításba. Görbe vonalakkal, illetve felületekkel határolt idomok esetében többnyire integrálszámítással határozható meg a súlypont.

Példaképpen határozzuk meg egy gyakran szereplő síkidom, a parabolaszélet súlypontját. Legyen a parabolaszélet két adata a és m (95. ábra).

A súlypont egyik koordinátája a szimmetriából azonnal következik:

$$x_s = 0.$$

A másikkordináta meghatározása végett ismernünk kell a határoló parabola egyenletét. Könnyen belátható, hogy az



95. ábra

$$y = cx^2 + d \text{ alakú.}$$

A c, d állandók rögtön adódnak, ha az A és B pontok koordinátáit behelyettesítjük:

$$m = 0 \cdot x^2 + d; \quad m = d, \\ 0 = c \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m; \quad c = -m \frac{4}{a^2}.$$

Ezután a súlypont koordinátája:

$$y_s = \frac{\int_{(A)} y dA}{\int_{(A)} dA} = \frac{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y \frac{1}{2} y dx}{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y dx} = \frac{\int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{-4m}{a^2} x^2 + m \right)^2 dx}{2 \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{-4m}{a^2} x^2 + m \right) dx} = \frac{\frac{4}{15} m^2 a}{\frac{2}{3} ma},$$

$$\underline{y_s = \frac{2}{5} m.}$$

Mellékeredményként azt a gyakran használható tényt kaptuk, hogy a parabolaszélet területe kétharmada a befoglaló téglalapénak.

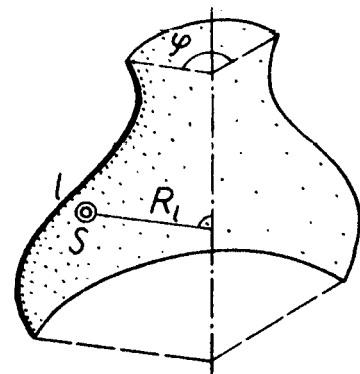
PAPPUS – GULDIN – TÉTELEK

Bizonyítás nélkül ismertetünk két, a műszaki gyakorlatban is gyakran alkalmazható tételt.

- I. Ha egy forgásfelület, illetve felületdarab (96. ábra)
- meridiángörbéjének ívhossza l ,
 - a meridiángörbe súlypontjának a felülettengelyétől mért távolsága R_l ,
 - a meridiángörbe síkja által leírt szög $\varphi \leq 2\pi$
 - a forgástengely nem metszi át a meridiángörbét,
- akkor a meridiángörbe φ szögű elforgatása során leírt felületdarab felszíne:

$$F = l\varphi R_l.$$

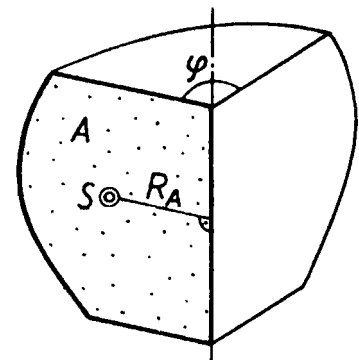
Szavakban: a felület felszíne a meridiángörbe súlypontja által megtett út és a meridiángörbe ívhosszának szorzata.



96. ábra

- II. Ha egy forgástest (97. ábra)
- meridiánmetszetének területe A ,
 - a meridiánmetszet súlypontjának a forgástengelytől mért távolsága R_A ,
 - a meridiánmetszet síkja által leírt szög $\varphi \leq 2\pi$
 - a forgástengely nem metszi át a forgatott síkidomot,
- akkor a meridiánmetszet φ szögű elforgatása során seprét térrész térfogata:

$$V = A\varphi R_A.$$



97. ábra

A tételek elsősorban a forgástestek felszínének és térfogatának számítására alkalmas (ismert súlypontadatok birtokában), de súlypont meghatározásra is alkalmasak (ismert felszín- vagy térfogat – adatok ismeretében).

Határozzuk meg példaként egy félkörlemez súlypontjának helyét (98. ábra).

A súlypont természetesen a szimmetriavonalon lesz, csupán az y_s koordinátát kell meghatározni.

Alkalmazzuk a II. Pappus – Guldin tételt!

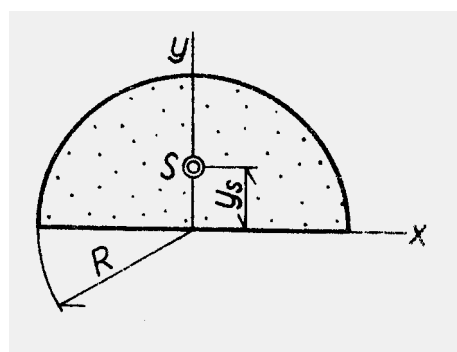
A félkör x tengely körüli (2π szöggel történő) elforgatása során seprtt térrész egy gömb.

A térfogat, a félkör területe, a forgásszög és y_s között a kapcsolat:

$$\underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}_V = \underbrace{\frac{R^2\pi}{2}}_A \cdot \underbrace{2\pi}_\varphi \cdot \underbrace{y_s}_{R_A}$$

A keresett súlypontkoordináta tehát:

$$\underline{y_s = \frac{4}{3\pi} R = 0,424R.}$$



98. ábra

MEGJEGYZÉS

A súlypont – koordinátákat megadó képletek megjegyzését megkönnyíti, ha a képletek nevezővel átszorított alakjának mechanikai értelmére figyelünk:

a $x_s \sum V_i = \sum x_i \Delta V_i$ képlet például kifejezi, hogy a súlyerők súlypontban ható eredőjének nyomatéka egyenlő a megoszló súlyerőrendszer nyomatékával.

A Pappus – Guldin – tételek tanulásánál gyakran elkövetett hiba: szem elől tévesztik, hogy egyszer a meridiángörbe, máskor a meridián metszet súlypontjáról van szó.

I.17. Tapadó és csúszó súrlódás

A SÚRLÓDÁS JELENSÉGE

Az eddigiekben feltettük, hogy a testeket határoló felületek mindegyike sima, vagyis azokon más, mint a felület normálisába eső támasztóerő nem ébredhet. Minden más esetben a felület érdes. Az érdes felületekkel határolt és egymással érintkező testek az egymáson történő elmozdítással szemben ellenállást fejtenek ki. Ez azzal magyarázható, hogy a határoló felületek apró kiemelkedései, mint egymásba akadó fogak gátolják a mozgást.

A jelenség neve: súrlódás. A viszonyokat módosítja, hogy a súrlódó testek szárazak vagy folyadékokkal nedvesítettek.

Itt csak az ún. száraz súrlódással foglalkozunk, a folyadéksúrlódással nem.

A szárazsúrlódás elméletét a műszaki gyakorlat számára kielégítő pontossággal Coulomb alkotta meg.

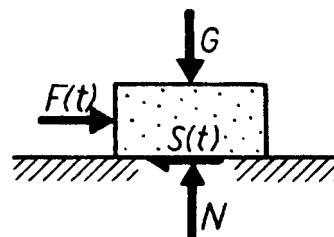
Tapasztalati tény, hogy ha egy érdes vízszintes síkra helyezett G súlyú testre a síkkal párhuzamos és az időben változó $F(t)^*$ erő hat, akkor a testnek az érdes síkkal érintkező felületén (99. ábra) olyan megoszló erőrendszer ébred, mely –nem túlságosan nagy $F(t)$ erő

* Kivételesen hivatkozunk az idő fogalmára. Az idő jele általában: t.

esetén- biztosítja a test nyugalmi helyzetét.

A test elmozdulását gátló megoszló erőrendszer $S(t)$ eredője a súrlódó erő. Esetünkben ez $F(t)$ - vel együtt változik az időben és minden pillanatban $\vec{S}(t) = -\vec{F}(t)$.

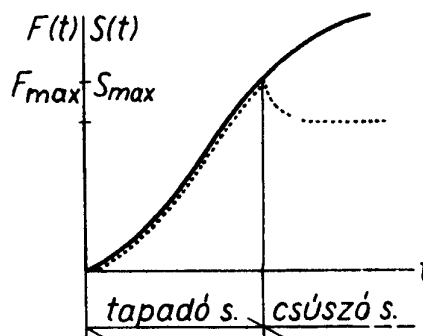
A fentieket még szemléletesebbé tesszük a 100. ábra segítségével. Növeljük az $F(t)$ erő valamilyen törvény szerint, 0-ról indulva (folytonos grafikon). A test elmozdulását gátló $S(t)$ súrlódó erő ugyanolyan törvény szerint változik (pontosított vonalú grafikon), tehát a két grafikon egybeesik. Ez a jelenség addig tapasztalható, míg $F(t)$ el nem ér egy bizonyos $F_{\max}$ illetve $S(t)$ egy vele egyenlő $S_{\max}$ értéket.



99. ábra

Ekkor a test az elmozdulás határán, más szóval a megcsúszás küszöbén van. $F(t)$ -t tovább növelve az eddig tapasztalt nyugvásbeli, vagy tapadó súrlódás megszűnik, a súrlódó erő hirtelen csökkenését tapasztaljuk.

$S(t)$ nem tart többé egyensúlyt $F(t)$ -vel, így a két erő időbeli változását leíró grafikonok szétválnak, egyidejűleg a test, mozgásnak indul. Súrlódó erő ugyan $F_{\max}$ túllépése után is hat a testre, de ez általában kisebb, mint $F_{\max}$ és többé-kevésbé független a mozgástól (a sebességtől). A mozgó testre ható súrlódó ellenállás a csúszó súrlódás.



100. ábra

SÚRLÓDÁSTÉNYEZŐ

A súrlódó erő irányának meghatározása végett tegyük fel, hogy a test méretei elhanyagolhatóak. A súrlódó erő hatásvonala ekkor merőleges az érintkezési ponthoz tartozó normálisra és az aktív erők eredőjének a normálisra merőleges összetevőjével ellentétes irányú.

Tapadó súrlódás esetén: ha $\vec{S}$ jelöli a súrlódó erő vektorát, a megcsúszás küszöbén

$$|\vec{S}| = \mu_0 N, \text{ ahol}$$

- μ_0 : a súrlódó testek anyagától, az érintkező felületek simaságától függő állandó, neve: a tapadó súrlódás tényezője (nyugvásbeli súrlódási tényező),
- N : a két súrlódó test között működő nyomóerők nagysága (a két test által egymásra gyakorolt erők normális összetevőjének abszolút értéke).

Ha a testek érintkezése nem elhanyagolható területű idomon történik, akkor a súrlódó erők rendszerének megoszlását csak az elmozdulás határán ismerjük. Ekkor az érintkezési idom minden pontjában érvényesül a COULOMB – súrlódás törvénye, mely szerint a súrlódó erők olyan irányúak és nagyságúak, mint amilyen az egyensúlyozáshoz szükségesek. Ha a nyugalomnak a súrlódás által biztosított lehetőségét kimerítettük, akkor az érintkezési idom

minden dA területű elemén $dS = \mu_0 dN$ súrlódó erő ébred, s mivel az ilyen nagyságú súrlódó erők akkor tudják az aktív erő „vízszintes” összetevőjének lehető legnagyobb értékét ellensúlyozni, ha azzal párhuzamos hatásvonalúak, a súrlódó erők megoszló párhuzamos erőrendszert alkotnak.

Csúszó súrlódás esetén, pontszerű érintkezést feltéve a súrlódó erő:

- μ : a súrlódó testek anyagától, az érintkező felületek simaságától függő állandó, neve: a csúszó súrlódás tényezője (a mozgásbeli súrlódás tényezője),
- N : értelmezése azonos a tapadó súrlódásnál szerepelt erőével,
- $\vec{v}_0$: a test érintkezési pontja mozgásának irányába mutató egységvektor.

Ha az érintkezés nem pontszerű, akkor a súrlódó erők megoszló erőrendszerének iránya az érintkezési idom minden pontjában az ott érvényes mozgásiránnyal ellentétes.

A súrlódástényező meghatározása kísérlettel történhet. Némi tájékozódást az alábbi táblázat nyújt.

A súrlódó testek anyaga	Tapadó súrlódási tényező:	Csúszó súrlódási tényező:
Acél és acél	0,15	0,09
Fa és fa	0,4 - 0,6	0,2 – 0,4
Fa és fém	0,6 – 0,7	0,4 – 0,5

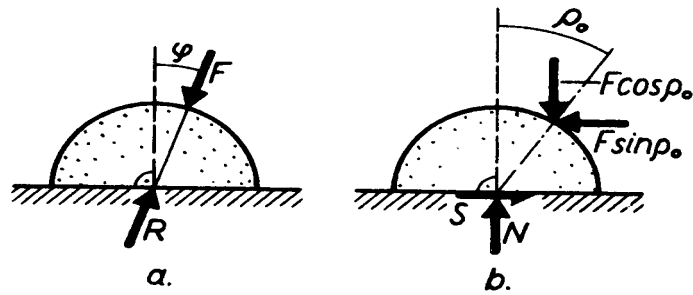
Felhívjuk a figyelmet a tapadó és csúszó súrlódás közti lényeges különbségre: a súrlódó erő nagyságát tapadó súrlódás esetén egyenlőtlenség, csúszó súrlódás esetén egyenlőség szolgáltatja.

SÚRLÓDÁSKÚP

A súrlódástényezőnek – mely dimenzió nélküli szám – szemléletes jelentés adható.

Tekintsünk egy érdes síkon nyugvó, elhanyagolható súlyú félgömböt és egy tetszőleges nagyságú F erőt, mely a test határfelületére merőleges hatásvonalú, és a 101/a ábrán látható normálissal változtatható szöget zár be. Ha az említett φ szöget 0-ról kiindulva növelni kezdjük, az egyensúly bizonyos ρ_0 szög eléréséig fennáll (101/b ábra). A testet elmozdítani igyekvő erő $F \sin \rho_0$, ezzel egyenlő az S súrlódó erő.

Ekkor $F \sin \rho_0 = S = \mu_0 N = F \cos \rho_0 \cdot \mu_0$.



101. ábra

Ebből $\operatorname{tg} \rho_0 = \mu_0$.

A súrlódási tényező tehát azon szög tangensének is tekinthető, melyet a megcsúszás küszöbén az aktív erők eredője a normálissal bezár. ρ_0 neve: súrlódási szög.

A fenti megfontolásban F nagysága nem játszott szerepet.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a test a megcsúszás küszöbén áll, ha a reá ható aktív erők eredőjének hatásvonala $\rho_0 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \mu_0$ szöget zár be a normálissal (feltesszük, hogy felbillenéssel nem kell számolni).

Ha az összes olyan erő hatásvonalát tekintjük, mely a test valamely P érintkezési pontján halad át, és ρ_0 szöget zár be a normálissal, akkor a mondott egyenesek egy P csúcsú forgáskúpot alkotnak, melynek tengelye a P – beli normális, fél nyílásszöge ρ_0 . Ez a súrlódáskúp (102. ábra).

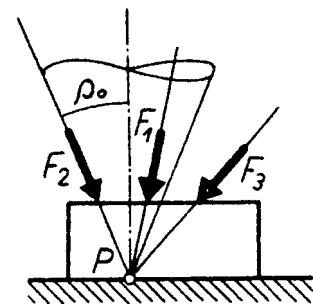
A test támaszidomának minden pontjához tartozik súrlódáskúp. Azt is mondhatjuk: a testre ható aktív erő mindaddig nem mozdtítja el a testet, míg az erő hatásvonalának a támasztó síkkal alkotott dőléspontjához tartozó súrlódáskúpban belül helyezkedik el a hatásvonal.

Ha a 102. ábrán látható aktív erők (ezek közt van a súlyerő is) eredője:

F_1 , a test nem mozdul el,

F_2 , a test az elmozdulás küszöbén van,

F_3 , a test elmozdul.



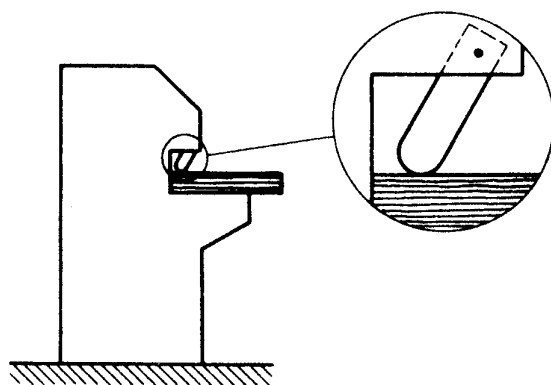
102. ábra

A fenti kijelentések érvénye az F_1, F_2, F_3 erők nagyságától független.

Csúszó súrlódás esetén szintén bevezethető a súrlódáskúp fogalma.

11. Példa

A vastagsági gyalugépbe betolt munkadarab visszalökődését a 103. ábrán látható megoldással akadályozzák meg: a munkadarabra az előtolás egy ún. visszavágás – gátló támaszkodik, mely a betolást nem akadályozza, de a visszalökődést igen.

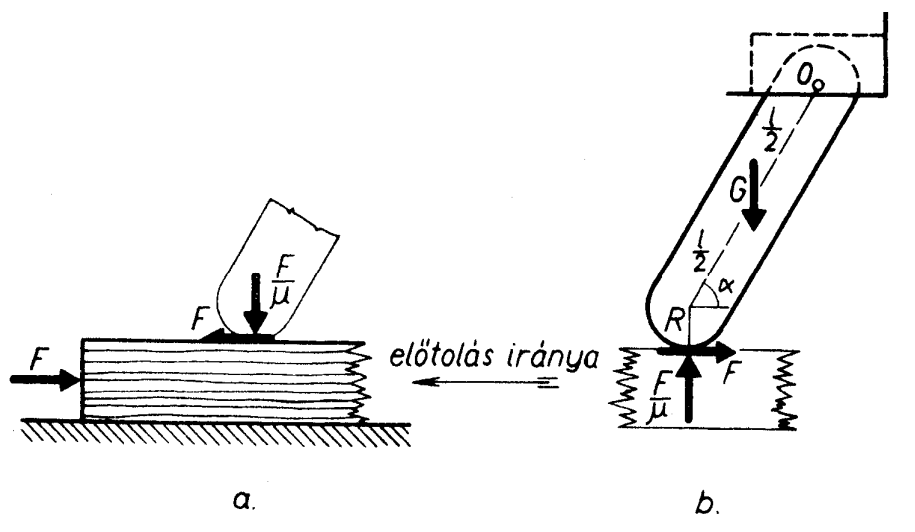


103. ábra

Állapítsuk meg, hogy milyen α szög alatt kell beállítani a gátlót, hogy bármekkora visszalökő erő esetén is hatásos legyen a berendezés. A gátló geometriai adatai (l , R), valamint G súlya ismert (104/b ábra), a súrlódástényező μ .

Megoldás.

Induljunk ki a munkadarabra ható erők vizsgálatából (104/a ábra). A munkadarab görgőkön mozog (ezeket és a támasztó erőket az ábra nem tünteti fel), így a munkadarab alsó síkján súrlódással nem számolunk.



104. ábra

Ugyancsak nincs most szerepe a munkadarab súlyának. A munkadarabot visszalökni kívánó F erővel ellentétes a munkadarab felső síkján ható, szintén F nagyságú súrlódóerő és az $\frac{F}{\mu}$ nagyságú normálerő.

Vizsgáljuk most adott α esetén a gátló egyensúlyát és nézzük meg, hogy mekkora lehet maximálisan a visszalökő erő (104/b ábra).

Az O forgáspontra felírt nyomaték – egyenlet a következő:

$$\frac{1}{2} \cos \alpha \cdot G + (l \sin \alpha + R)F - l \cos \alpha \cdot \frac{F}{\mu} = 0,$$

$$F \left[\frac{l}{\mu} \cos \alpha - (l \sin \alpha + R) \right] = \frac{l}{2} \cos \alpha \cdot G,$$

$$F = \frac{\frac{l}{2} \cos \alpha \cdot G}{\frac{l \cos \alpha}{\mu} - (l \sin \alpha + R)}.$$

Adott α esetén tehát maximálisan ekkora visszalökő erő hathat. Ha a nevező $\rightarrow 0$, $F \rightarrow \infty$. Bármekkora lehet a visszalökő erő, ha

$$\frac{l \cos \alpha}{\mu} - (l \sin \alpha + R) = 0,$$

vagyis teljesül

$$\mu = \frac{l \cos \alpha}{l \sin \alpha + R} = \operatorname{tg} \rho \text{ összefüggés.}$$

Amint az könnyen belátható, ez a feltétel azt jelenti, hogy a gátló érintéspontjában felvett súrlódáskúp egyik alkotója átmegy az O ponton.

Az így meghatározott α szögnél nagyobb α természetesen szintén megfelel.

I.18. Csapsúrlódás, kötelsúrlódás, gördülési ellenállás

CSAPSÚRLÓDÁS

Újra szemügyre vesszük az I. 4. – ben megismert csuklós kapcsolatot, most azonban a valóságnak megfelelően nem tesszük fel, hogy a csapágycsap és a csap sima merev test.

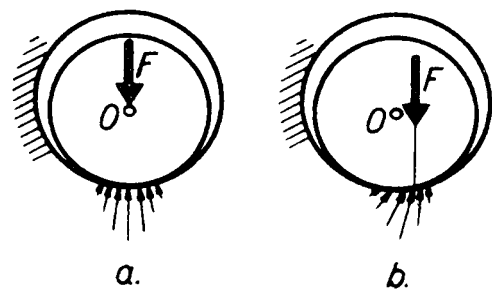
A valóságban a csap átmérője valamivel kisebb a furat átmérőjénél (ezt a 105. ábra túlozva ábrázolja a szemléletesség kedvéért) és a két test érintkezése a valóságban nem egyetlen hengeralkotó mentén történik, mert a rugalmas anyagú csap és csapágy deformálódik.

A tapasztalat azt mutatja, hogy ha a csapot terhelő erő hatásvonala átmegy a csap középpontján, akkor a csap nyugalomban marad, a furat által a csapra gyakorolt támasztó erőrendszer szimmetrikus, melynek megoszlásáról közelebbit nem mondhatunk.

Ebben az esetben az egyensúly sima felületek feltételezése esetén is lehetséges (ekkor a reakció – erőrendszer irányát minden érintkezési pontban az ott érvényes normális szabja meg), a továbbiakban azonban súrlódással számolunk.

Ha az F csapterhelés hatásvonala nem halad át a csap O középpontján (105/b ábra), de nem túl nagy távolságra van attól, még továbbra is lehetséges az egyensúly.

A megoszló reakció – erőrendszer mindenesetre ekkor már nem szimmetrikus és a súrlódás jelenléte miatt a reakcióerők iránya általában nem a normálissal esik egybe. Az F csapterhelés hatásvonalának, a csapközéppontnak a távolságát tovább növelve eljutunk egy oly R_0 távolsághoz, melyet bármilyen kis értékkel túllépve a csap elfordul,



105. ábra

megcsúszik a furatban.

A csapterhelés szempontjából nincsen kitüntetett irány, bármilyen, a csapközépponttól R_0 távolságban ható erő esetén, küszöbön áll a megcsúszás. Az O körül R_0 sugárral rajzolt kör a csapsúrlódás köre, R_0 a csapsúrlódás sugara.

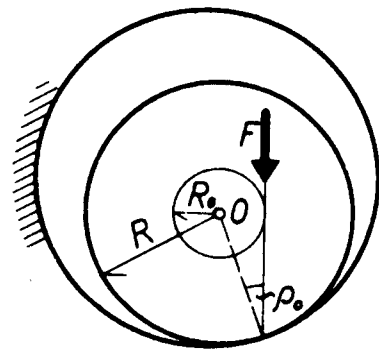
R_0 pontos meghatározása sztatikai úton nem lehetséges. Néhány egyszerűsítő feltevéssel élve azonban R_0 megbecsülhető.

Tegyük fel, hogy a deformációk elhanyagolhatók, s így a csap felfekvése egyetlen henger – alkotó mentén történik.

Ha az R sugarú csap a megcsúszás küszöbén van, akkor a csapterhelés hatásvonala az érintkezési ponthoz tartozó normálissal ρ_0 szöget zár be (106. ábra), ennélfogva

$$R_0 = R \sin \rho_0 = R \frac{\operatorname{tg} \rho_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \rho_0}} = R \frac{\mu_0}{\sqrt{1 + \mu_0^2}}.$$

Becslésünk jónak mondható, ha elég lazán illeszkedik a csap a furatba.



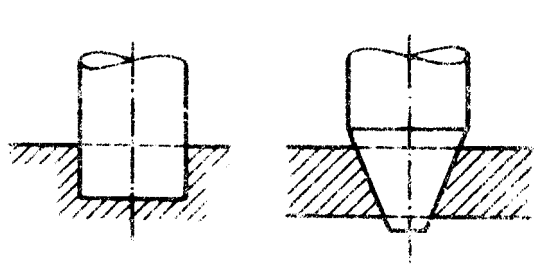
106. ábra

Valójában $R_0 = R \frac{\alpha \mu_0}{\sqrt{1 + \mu_0^2}}$ ahol $\alpha \gg l$.

Az $\frac{\alpha \mu_0}{\sqrt{1 + \mu_0^2}}$ tényezőt μ' - vel jelöljük, és csapsúrlódás tényezőjének nevezzük.

Mivel α és $\frac{l}{\sqrt{1 + \mu_0^2}}$ egyaránt alig különbözik l - től, $\mu' \approx \mu_0$.

A fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy a csapsúrlódás sugara arányos a csapsugárral és függvénye az anyagi minőségnek, valamint a felületek megmunkáltságának. A fentebb tárgyalt csapkialakítás (sikló csapágy) mellett említést érdemelnek a különféle megoldású talpcsapágyak (107. ábra) is.



107. ábra

KÖTÉLSÚRLÓDÁS

A műszaki gyakorlatban sokszor alkalmazott kötelek, hajtószíjak, huzalok mechanikai viselkedése tekintetében lényeges szerepe van a súrlódásnak. A jelenségek magyarázata céljából ideális kötélrel dolgozunk, vagyis feltesszük, hogy a kötél (I. 4.)

- nyújthatatlan,
- tökéletesen hajlékony,
- súlytalan.

Rendszerint a kötél vastagsága is elhanyagolható.

Tapasztalatból tudjuk, hogy ha egy érdes rögzített hengeren átvett kötél egyik végén teher függ, s a másik végre gyakorolt kis erővel is biztosítható az egyensúly, de viszonylag nagy erő szükséges ahhoz, hogy a teher emelkedjék. Fokozottan érvényesek a fentiek akkor, ha a kötél felfekvési ívhosszához tartozó szög π többszöröse.

A jelenséget a 108/a ábrán szemléltetjük.

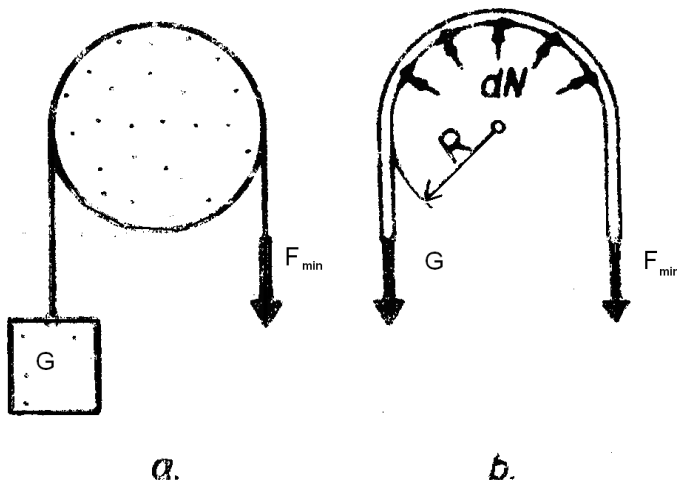
Ha azt a legkisebb $F_{\min}$ erőt keressük, mely a G súlyú teher egyensúlyban tartásához szükséges (vagyis melynél a teher süllyedése áll küszöbön), akkor $F_{\min} < G$.

Ugyanis –mivel a súrlódás teljesen ki van merítve- a kötél minden érintkezési pontjában az ott érvényes dN normálerő és μ_0 szorzatából álló súrlódóerő hat a G és $F_{\min}$ erőkön kívül (108/b ábra). A kötéltre ható összes erőnek a henger tengelyére felírt nyomatéka:

$$RG - \int R\mu_0 dN - R \cdot F_{\min} = 0,$$

$$F_{\min} = G - \int \mu_0 dN < G.$$

Ha azt a legnagyobb erőt keressük, mely a teher egyensúlyban tartását még lehetővé teszi (vagyis melynél a teher emelkedése áll küszöbön), akkor hasonló megfontolással azt kapjuk, hogy $F_{\max} > G$.



108. ábra

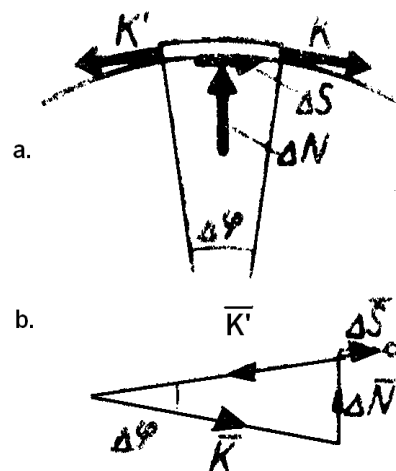
Arra a kérdésre, hogy milyen a kapcsolat van egy a megcsúszás küszöbén lévő kötélrész végeire ható erők között, a válasz a következő:

Tétel: ha egy rögzített érdes hengerre csévelt kötél felfekvési szöge α , a kötél és a henger közti tapadó súrlódás tényezője μ_0 , a kötélrész végeire ható erők F_0 és $F > F_0$, végül, a kötélrész a megcsúszás küszöbén áll, akkor

$$F = F_0 e^{\mu_0 \alpha}.$$

109. ábra

* e a természetes logaritmus alapszáma: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718$



Bizonyításvázlat.

Vizsgáljuk a felfekvő kötélszakasz egy olyan darabját, melyet a henger két, egymással $\Delta\varphi$ szöget bezáró szimmetriasíkja metsz ki

A kötéldarabra ható erők a következők: K, K' kötélérők, ΔN normálerő, ΔS súrlódó erő. Ezek vektoriális összege zérus. A 109/b ábrából kiindulva megmutatható, hogy ha $\Delta\varphi \rightarrow 0$, akkor $K' \rightarrow K$, $\Delta N \rightarrow K\Delta\varphi$, $\Delta S \rightarrow \mu_0 K\Delta\varphi$ valamint $\Delta S \rightarrow K' - K = \Delta K$.

ΔS két alakját összehasonlítva azt látjuk, hogy

$$\Delta K \rightarrow \mu_0 K\Delta\varphi$$

Határátmenettel $\frac{dK}{K} = \mu_0 d\varphi$.

Ez a kötélsúrlódás differenciálegyenlete. Ha egy α felfekvési szöghöz tartozó két kötélrő között akarunk összefüggést teremteni, ezt a differenciálegyenletet kell integrálni $\varphi = 0$, $\varphi = \alpha$, s az ezeknek megfelelő kötélrők, mint integrálási határok között

$$\int_{F_0}^F \frac{1}{K} dK = \int_0^\alpha \mu_0 d\varphi; \quad [\ln K]_{F_0}^F = \ln \frac{F}{F_0} = \mu_0 \alpha,$$

$$F = F_0 e^{\mu_0 \alpha}.$$

A kötélrő α és μ_0 növekedésével rohamosan nő.

Emlékeztetünk az $y = e^x$ függvény grafikonjára (110. ábra).

E függvényábra, illetve a kötélrő képlete érthetővé teszi, hogy egy rögzítőkötél már néhányszoros körültekerés esetén is igen nagy erők felvételére képes.

Figyelemreméltó, hogy a képletben az érdekes fix henger sugara nem szerepel. Ha azt a minimális erőt keressük, amellyel adott α, μ_0 esetén még éppen meg lehet tartani egy G súlyú testet, akkor

$$G = F_{\min} e^{\mu_0 \alpha}, \quad F_{\min} = \frac{G}{e^{\mu_0 \alpha}} = G e^{-\mu_0 \alpha}.$$

110. ábra

Ha a kötélrő maximális értékét keressük, akkor

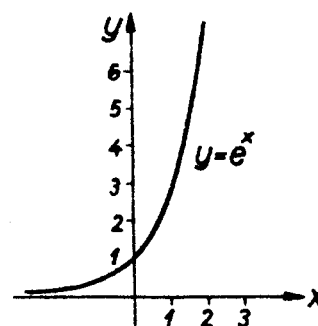
$$F_{\max} = G e^{\mu_0 \alpha}.$$

Végeredményben a szabad kötélvégre ható F erőre a következő kirovás érvényes:

$$G e^{-\mu_0 \alpha} \leq F \leq G e^{\mu_0 \alpha}.$$

MEGJEGYZÉS

Hogy rögzített μ_0 esetén milyen az $F(\alpha)$ függvény, azt nem tudtuk mechanikai megfontolásokkal közvetlenül meghatározni. Felírható volt azonban a felfekvő kötéldarab egy



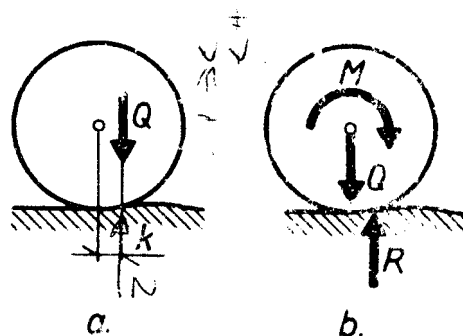
elemi szakaszának mechanikai viselkedését leíró differenciálegyenletet. Megjegyezzük, hogy a bizonyításban szereplő határátmenetek érvényességét pontosan nem igazoltuk, így gondolatmenetünk nem tekinthető teljes bizonyításnak.

Egy – egy mechanikai probléma matematikai modelljét jelentő differenciálegyenlet felírásával a továbbiakban is találkozunk.

GÖRDÜLÉSI ELLENÁLLÁS

Vízszintes aljzaton (sín, talaj, stb.) nyugvó járműkerekek, hengerek, golyók (forgástestek) a tapasztalat szerint akkor nem gördülnek el, ha a test (továbbiakban: kerék) terhelése a 111/a ábra szerinti, vagyis az aljzat síkjára merőleges, de a kerék érintkezési pontjától nem túl nagy távolságra lévő hatásvonalon működő Q erő.

A jelenség ismét a testek deformálódásának figyelembevételével magyarázható.



111. ábra

Ha a 111/b ábra szerint a kerék terhelését egy centrikusan ható Q erőre és egy M erőpárra bontjuk, azt találjuk, hogy deformálódó aljzat által a (szintén deformálódó) kerékre gyakorolt R reakcióerő Q -val együtt erőpárt alkot, mely az M erőpárral egyensúlyban van mindaddig, amíg Q és R hatásvonalainak egymástól mért távolsága nem halad meg egy – eléggé kicsiny – k értéket. Az aljzat deformálódása többé – kevésbé az ábrán látható módon alakul, vagyis a kerék haladási irányában jelentkezik bizonyos mértékű feldomborodás.

A leírt jelenég – vagyis, hogy a testek deformálódása a gördülést gátló hatást képes biztosítani – a gördülési ellenállás.

R hatásvonalának az érintkezési ponttól mért maximális k távolsága – melynél még nem következik be a gördülés – a gördülési ellenállás karja. Ez távolság dimenziójú mennyiség, értéke a fontosabb esetekre vonatkozólag táblázatokban található.

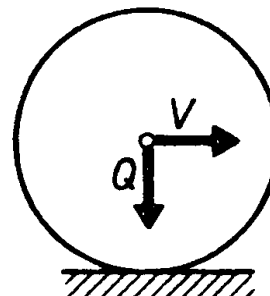
Valójában k nem igazi állandó, hanem több tényező függvénye. A kerék sugarának, a sebességnek, a gördülésben részt vevő testek anyagának, és például fánál a gördülés irányának (a rostirányhoz viszonyítva) is szerepe van.

Tapasztalatunk szerint az aljzat nem csupán a saját síkjára merőleges aktív erők esetén képes gátolni a gördülést, hanem olyan esetben is, mint amelyet a 112. ábra szemléltet.

Ezt az általánosabb esetet nem vizsgáljuk részletesen, csak összefoglaljuk a számítások szempontjából lényeges tudnivalókat.

A kerék, gördülő mozgásánál egyidejűleg szerepe lehet a Coulomb – súrlódásnak is. Ha a kerékre ható aktív erők eredője a gördülés mentességet biztosító fekvési pontok $2k$ hosszúságú szakaszán belül metszi az aljzatot, nem jön létre gördülés.

Ha ezen kívül az említett eredőnek az érintkezési ponthoz tartozó normálissal bezárt szöge nem nagyobb, mint ρ_0 (a tapadó súrlódás szöge), akkor a magcsúszás veszélye sem áll fenn.

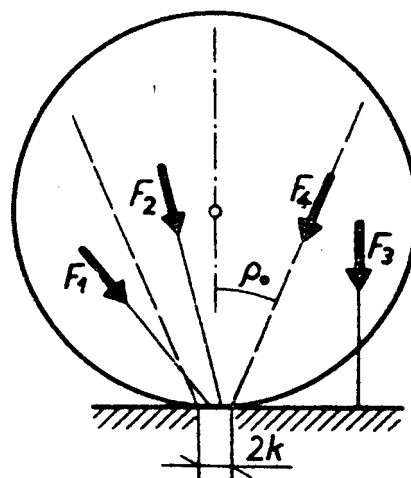


112. ábra

Az elmondottakat szemlélteti a 113. ábra, melyen az F_1, F_2, F_3, F_4 erők külön – külön a következő jelenségek okai:

- F_1 : csúszás (gördülés nélkül),
 F_2 : nyugalom,
 F_3 : gördülés (csúszás nélkül),
 F_4 : egyidejű csúszás – és gördülés – veszély.

Megemlítjük még, hogy a gördülési ellenállás lényegesen kisebb, mint a Coulomb – súrlódás formájában jelentkező ellenállás. Ezt a tényt messzemenően kihasználja a műszaki gyakorlat, például a gördülő csapágyak alkalmazásánál.



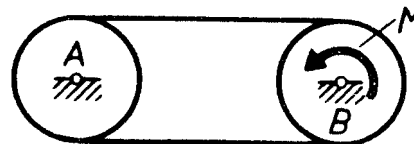
113. ábra

12. Példa

A 114. ábra ún. szíjhajtást ábrázol.

Az A jelű kerék egyenletes forgatásához, illetve a hozzákapcsolt szerkezet mozgatásához a B jelű kerékre állandóan M nyomatékú erőpárt kell működtetni.

Meghatározandók a szabad szíjágakban ébredő erők (működés közben), valamint a B kerék tengelye által a csapágyra kifejtett T erő.



114. ábra

Megoldás.

Vizsgáljuk a B jelű szíjtárcsa egyensúlyát!

Ha a súrlódás teljesen ki van merítve, akkor a 115. ábra alapján a szíjágakban ható erők:

$$S_0 \text{ és } e^{\mu} S_0 = c S_0.$$

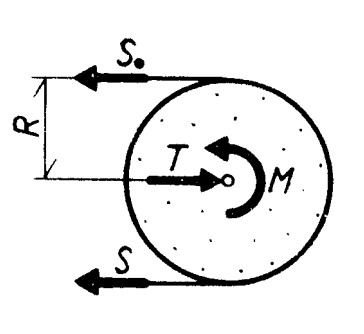
A tengely által kifejtett erő:

$$T = S_0(1 + c).$$

A tengelyre felírt nyomaték – egyenlet:

$$R S_0 + M - R c S_0 = 0.$$

Ebből a keresett súlyerők:



115. ábra

$$\underline{S_0 = \frac{M}{R(e^{\mu\pi} - 1)}}, \quad \underline{S = \frac{M \cdot e^{\mu\pi}}{R(e^{\mu\pi} - 1)}}, \quad \underline{T = \frac{M(e^{\mu\pi} + 1)}{R(e^{\mu\pi} - 1)}}.$$

A hajtószíjat bizonyos mértékig elő kell feszíteni, mert a laza szíj megcsúszhat a szíjtárcsán.

Megmutatható, hogy a szükséges előfeszítő erő nyugalmi helyzetben: $S_e = \frac{1}{2}(S_0 + S)$.

Megemlítjük még, hogy a tárgyalt példa pontosabb megoldásához a forgás következtében fellépő hatásokat is figyelembe kellene venni. Ehhez azonban a sztatika eszközei nem elegendők.

I.19. Egyszerű gépek, fékszerkezetek

Minden gépben megtalálunk néhány lényegileg azonos alapelemet az ún. egyszerű gépeket. Ezek lehetnek lejtő típusúak: lejtő, ék, csavar és emelő típusúak: emelő, csiga, hengerkerék.

Az alábbiakban néhány, a műszaki gyakorlat szempontjából jelentős feladatot mutatunk be az egyszerű gépekkel kapcsolatban, mintegy az eddig tárgyalt sztatika – anyag alkalmazása-képpen.

LEJTŐ

Fontos szállítóeszköz. Segítségével a terhek kisebb erővel emelhetők, illetve csúsztathatók. A valóságos lejtő mindig érdes.

1.Probléma: nyugalomba maradhat – e az érdes lejtőre helyezett és magára hagyott test?

E kérdésre lényegében már választ adtunk korábban (I.17). Amennyiben a testre ható aktív erő –ez most a súlyerő- hatásvonalának dőléspontja a támasz – idomon belül van, s a hatásvonal a dőlésponthoz rendelt súrlódáskúpban helyezkedik el, a test nyugalomban marad.

A fentiek, illetve a 116. ábra alapján az elmozdulás küszöbén a lejtő hajlásszöge és a súrlódási szög között a kapcsolat:

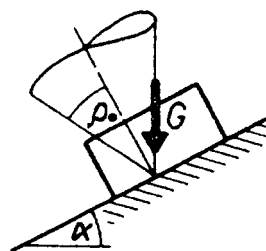
$$\alpha = \rho_0.$$

Ez az összefüggés egyszerű módszert nyújt a súrlódástényező kísérleti meghatározására.

ρ_0 - nál kisebb hajlásszögű lejtő esetén a test szintén nyugalomban marad, és nincs a megcsúszás küszöbén.

Az $\alpha \leq \rho_0$ hajlásszögű lejtőt önzárónak nevezik.

2.Probléma: milyen legkisebb erővel lehet megakadályozni egy (nem önzáró) lejtőre helyezett test lecsúszását?



116. ábra

A lefelé csúszás küszöbén a testre ható erők egy, a lejtő síkjára merőleges és esésvonalat tartalmazó síkban helyezkednek el. Ezek az erők: a G súlyerő a T_1 támasztóerő, és a lecsúszást gátló F_1 erő (117. ábra).

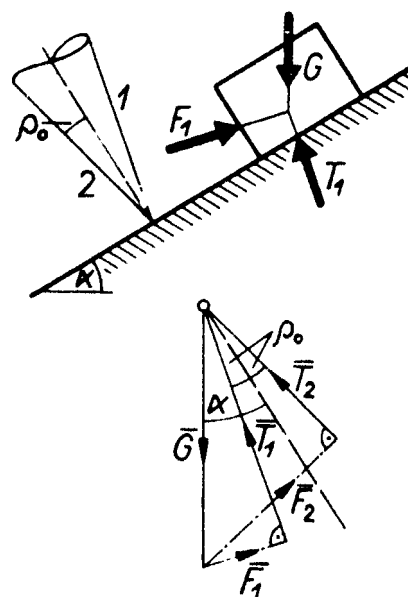
Külön szemléltet az ábra egy súrlódás-kúpot. A lefelé történő csúszás határán G és F_1 eredője e kúp e jelű alkotójával párhuzamos.

F_1 vektora könnyen meghatározható. Ugyanis $(G, F_1, T_1) \div 0$ $T_1 \parallel 1$ és $|F_1|$ minimális. Ezekből következik, hogy F_1 vektorát az ábrán feltüntetett szerkesztéssel nyerjük. A vektorábráról leolvasható, hogy

$$F_1 = G \sin(\alpha - \rho_0).$$

Hasonló megfontolással adódik, hogy a lejtőn felfelé vonszoláshoz szükséges minimális vonszoló erő

$$F_2 = G \sin(\alpha + \rho_0).$$



117. ábra

Figyelemre méltó, hogy a szélsőérték – tulajdonságot mutató F_1, F_2 erők nem párhuzamosak a lejtő síkjával, továbbá, hogy $\alpha = 0$ esetén a legkedvezőbb vonszoló erő ρ_0 szöget zár be a vízszintessel.

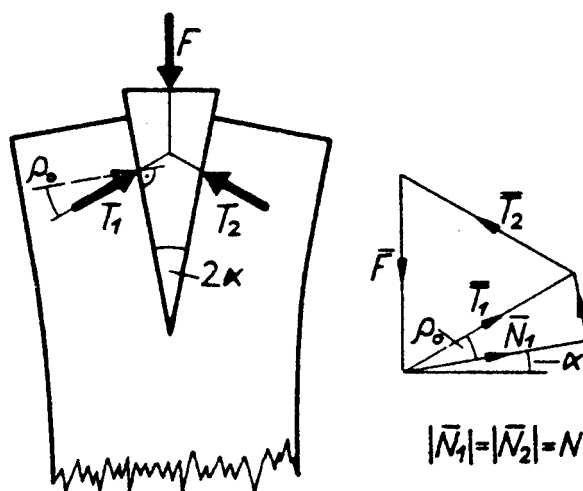
ÉK

Arra a kérdésre, hogy milyen kapcsolat áll fenn egy éknek az anyagba való behatolási mélysége és az ékre ható erő között, nem adunk választ. Ehhez nyilván az anyag tulajdonságait is ismerni kellene.

Bizonyos összefüggés az ékre ható erők, az ék lapjai által bezárt szög és a súrlódástényező között azonban könnyen megállapítható – ha az ék a továbbhatolás küszöbén áll. Legyen az – egyszerűség kedvéért szimmetrikus- ékre ható aktív erő F , az ék lapjaira az anyag által kifejtett erők normális összetevőjének nagysága N , az ék lapjai által bezárt szög 2α , a súrlódási szög ρ_0 .

Ekkor a vektorábra (118. ábra) alapján:

$$\frac{N}{\cos \rho_0} \sin(\alpha + \rho_0) = \frac{F}{2}, \quad F = 2N \frac{\sin(\alpha + \rho_0)}{\cos \rho_0}.$$



118. ábra

A képletből kiolvasható, hogy α csökkentésével a számláló, tehát F is csökken.

Ugyancsak előnyös ρ_0 csökkentése, mert akkor a számláló csökken, a nevező növekszik, végeredményben F csökken. Ezért például a fémek vágásához használt vésők élét olajba mártják súrlódástényező csökkentése céljából.

Itt is beszélhetünk önzárásról: önzáró az ék, ha magára hagyva ($F=0$) nem vetődik ki az anyagból.

A fenti számításhoz hasonló azt mutatja, hogy az ék kivetődését $F = 2N \frac{\sin(\alpha - \rho_0)}{\cos \rho_0}$ erővel

lehet meggátolni. Ebből következik, hogy az önzárás feltétele $\alpha \leq \rho_0$.

A lejtő és az ék együtt jelentkezik a 119. ábrán, melyen egy horony és egy benne elmozdítható ék szemléltethető (az ék két nézetben).

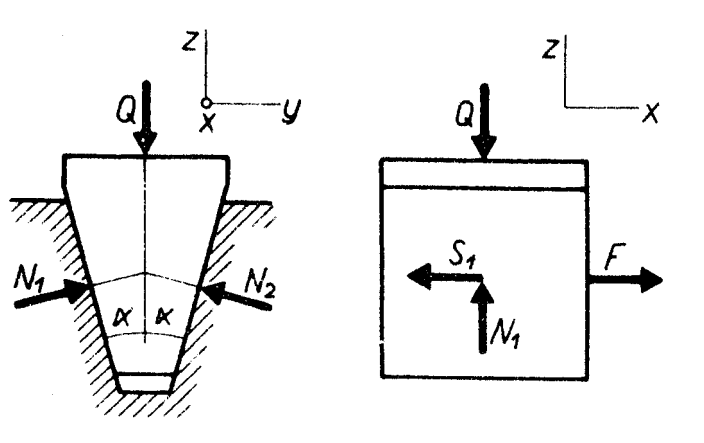
Problémát jelenthet annak a – papír síkjára merőleges, vagyis x irányú – erőnek meghatározása, mely az ék elmozdításához szükséges, midőn az ék terhelése Q , a súrlódástényező ρ_0 .

Legyenek az ék lapjaira ható támasztóerők normális összetevői $N_1 = N_2 = N$, a súrlódó erők $S_1 = S_2 = \mu_0 N$.

Ezek iránya olyan, hogy az elmozdulást a lehetséges legnagyobb mértékben gátolják, vagyis F irányával ellentétesek.

Az elmozdulás határán

$$\sum F_x = F - 2\mu_0 N = 0, \quad \sum F_z = -Q + 2N \sin \alpha = 0, \quad F = \frac{\mu_0 Q}{\sin \alpha} = \mu'_0 Q.$$



119. ábra

A horony hatása olyan, mintha a súrlódástényező

$$\mu'_0 = \frac{\mu_0}{\sin \alpha} > \mu_0 \text{ értékűre növekedne.}$$

Ennélfogva, ha az a cél a súrlódás növelése –például fékezésnél- akkor az α szöget kicsire kell választani.

Ha a súrlódás káros –például gépek vezetékeinél- akkor nagyra.

CSAVAR

E fontos kötőelem leggyakoribb két típusa a lapos menetű és az éles menetű csavar.

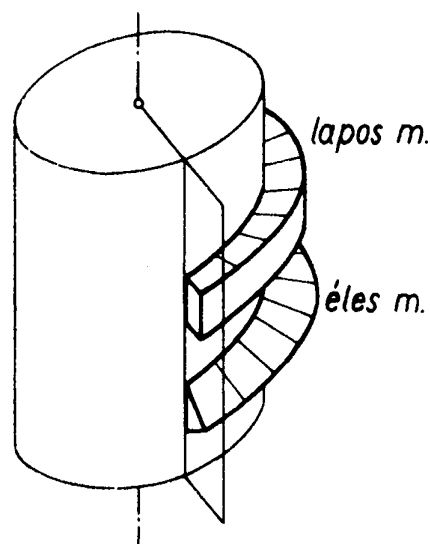
Geometriai származtatásuk a 120. ábrából érthető meg. Egy henger tengelyét tartalmazó síkban olyan téglalapot, illetve egyenlőszárú háromszöget veszünk fel, melynek oldala (illetve a háromszög alapja) a hengerből a sík által kimetszett alkotóra esik.

Ezután a síkot a henger tengelye körül egyidejűleg egyenletesen forgatjuk és a tengellyel párhuzamosan eltoljuk. E csavarmozgás során a síkidomok felületeket írnak le, melyek közül a vonalkákkal jelöltek lapos – illetve éles menetű csavarfelületek. A henger és a csavarfelületek együttesen határolják a csavart (csavarorsó).

A csavarmozgást végző síkidom által 360° – os elfordulás során leírt alakzat a csavar egy menete, a közben végbement tengelyirányú eltolás a menetemelkedés. Az ábrán nem látható a csavar negatív formáját mutató anyamenet, melybe a csavarorsó behajtható.

Megjegyezzük, hogy csak az ábratakarékosság kedvéért ábrázoltuk együtt a két menetfajta. Valójában ilyen vegyes csavarmenetet nem szoktak készíteni.

Lapos menetű csavarral találkozunk például a faipari műhelyek nélkülözhetetlen eszközeiben, a pillanatszorítóban (121. ábra).

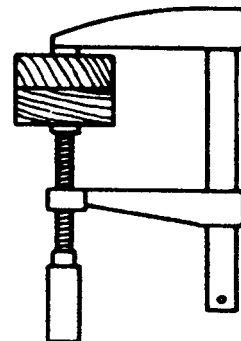


120. ábra

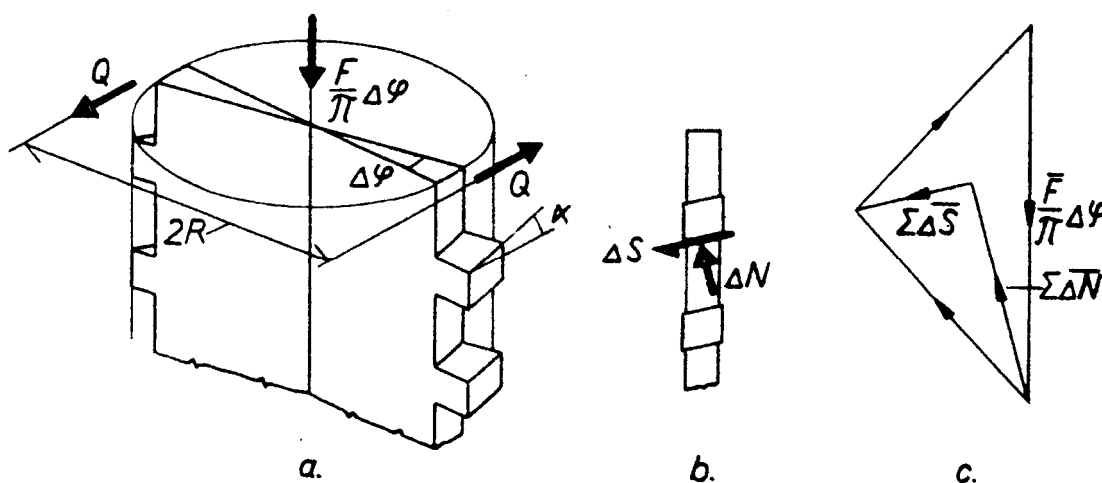
Kézenfekvő probléma: mi az összefüggés a pillanatszorító orsójára gyakorolt nyomaték és szorítópofák által gyakorolt nyomóerők között? Tegyük fel, hogy az összeszorított anyag által a csavarra kifejtett (megoszló) erő eredője F , s a csavarra ható erőpár forgatónyomatéka M .

A csavarnak két, egymással $\Delta\varphi$ szöget bezáró szimmetriasíkja által határolt részére (122/a ábra) ekkor $\frac{F}{\pi}\Delta\varphi$ erő jut, a nyomatékból pedig

$$\frac{M}{\pi}\Delta\varphi.$$



121. ábra



122. ábra

Az említett csavar rész (továbbiakban: szelet) menetes részének csavarfelület – darabjait kis $\Delta\varphi$ esetén síkidomoknak tekinthetjük. E síkidomokra ható ΔN és $\Delta S = \mu_0 \Delta N$ erők a 122/b ábrán szemléltethetők. A csavarmenet közepes sugarát R -rel jelölve, a szeletre ható erőpárt előállíthatjuk $2R$ karral és $Q = \frac{M\Delta\varphi}{\pi 2R}$ alappal.

Ezután vázoljuk fel a szeletekre ható erők vektorábráját az elmozdulás küszöbén (122/c ábra). A nyomóerő, a menetekre ható $\sum \Delta N$ és $\sum \Delta S$ erők, $\bar{Q}$ és $-\bar{Q}$ vektorú erőpáralapok és szelet túlsó részére ható erők vektoriális összege zérus.

A vektorábrából leolvasható:

$$\frac{1}{2} \frac{F}{\pi} \Delta\varphi \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \rho_0) = Q = \frac{M\Delta\varphi}{\pi 2R}, \quad \underline{F = \frac{M}{R \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \rho_0)}}.$$

Ha az a cél, hogy adott M nyomatékkal minél nagyobb erőt fejtsünk ki, akkor eredményünk szerint α és ρ_0 értékét csökkenteni kell.

Az éles menetű csavarnál módosított súrlódástényezővel dolgozunk – mint a horonnyal kapcsolatban láttuk.

Éles menetű csavart ott alkalmazunk, ahol a csavarkötés lazulását akarjuk megnehezíteni.

CSIGA, HENGERKERÉK

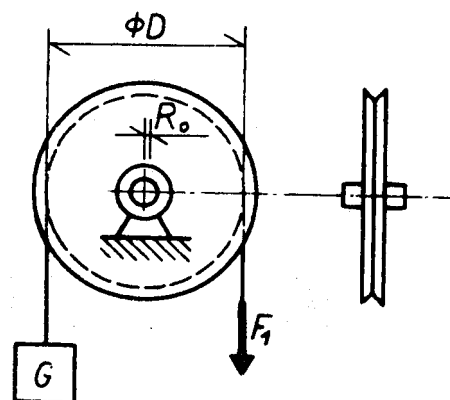
Nem foglalkozunk a szorosabb értelemben vett emelővel (egy- és kétkarú emelő), csupán speciális formájával, a csigával és a hengerkerékkel. Ezek fogalmát ismertnek tekintjük.

Először azzal a problémával foglalkozunk, hogy egy G súlyú teher, álló csigával történő emeléséhez minimálisan mekkora F_1 erő szükséges, ha a csapsúrlódás jelenségét is figyelembe vesszük (123. ábra).

A csigát és tengelyét egy testnek tekintjük és feltesszük, hogy a kötélnem csúszhat meg a csigán. A teher az emelkedés küszöbén áll, ha az F_1 , G erők eredőjének hatásvonala a csiga tengelyéhez tartozó, R_0 sugarú csapsúrlódási kört (jobbról) érinti.

$$\text{Ekkor} \quad G \left[\frac{D}{2} + R_0 \right] - F \left[\frac{D}{2} - R_0 \right] = 0,$$

$$\underline{F_1 = G \frac{D + 2R_0}{D - 2R_0}}$$



123. ábra

Hasonló számítás szerint az az F_2 erő, melynél a teher a süllyedés küszöbén áll:

$$F_2 = G \frac{D - 2R_0}{D + 2R_0}.$$

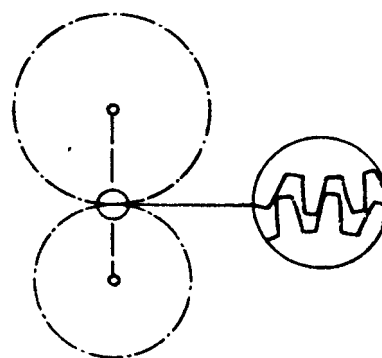
A teher (és a csiga) nyugalomban van, ha $F_2 \leq F \leq F_1$.

A két szélső erő aránya:

$$\frac{F_1}{F_2} = \left[\frac{D + 2R_0}{D - 2R_0} \right]^2.$$

Ha hengerkerekekből összeépített szerkezet egyensúlyát elemezzük, célszerű a szerkezetet részenként vizsgálni. Gondosan fel kell tüntetni az egyes részekre ható erőket, figyelembe véve az akció – reakció elvet.

Fogaskerék – szerkezetek is hengerkerekekből összetettnek tekinthetők. Ekkor az egymással érintkező fogak által gyakorolt erők közelítőleg a kerékközéppontok centrálisára merőleges hatásvonalúak, amint az a 124. ábra kinagyított részletén látható.



124. ábra

Az elmondottak illusztrálására vizsgáljuk meg a következő problémát. A 125. ábrán látható I. jelű kettős fogaskerék két kereke közül a nagyobbik osztókörenek* sugara adott R . E kerékre ható erő (egy másik fogaskerékről adódó fognyomás) F .

Az I. jelű kettős kerék kisebbik fogaskerekéhez egy II. jelű fogaskerék kapcsolódik, melynek tengelye ismert d távolságra helyezkedik el I. tengelyétől. A II. jelű kerékre adott M nyomatékú erőpár hat.

Határozzuk meg a két fogaskerék által egymásra kifejtett Q fognyomásokat és az I. jelű kettős kerék r sugarát.

A szerkezetet részekre bontjuk és feltüntetjük az erőket (126. ábra). T_1, T_2 a tengelyek által a kerekre kifejtett erők.

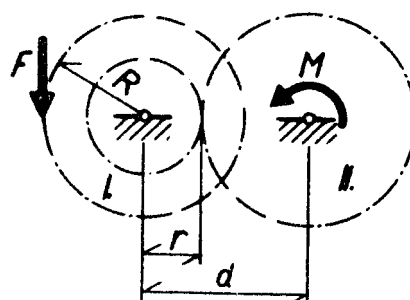
* Két egymáson gördülő osztókör ugyanazt a forgási (sebesség) viszonyt hozza létre, mint az általuk képviselt fogaskerékpár.

A két rész tengelyére felírt nyomatékegyenletek:

$$RF - rQ = 0, \quad M - (d - r)Q = 0.$$

Ebből az egyenletrendszerből

$$r = \frac{d \cdot R \cdot F}{M + RF}, \quad Q = \frac{M + RF}{d}.$$

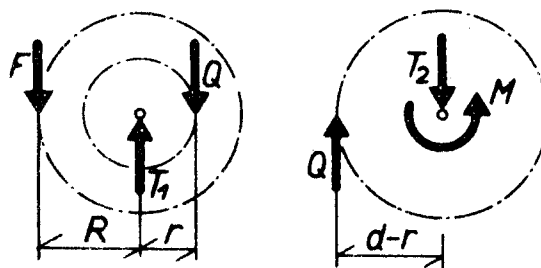


125. ábra

Legyen $R=10 \text{ cm}$, $d=14 \text{ cm}$

$F=200 \text{ N}$, $M=3000 \text{ Ncm}$,

$R=5,6 \text{ cm}$, $Q=357,1 \text{ N}$.



A tengelyekre ható erők:

$$\begin{aligned} T_1 &= F + Q = 557,1 \text{ N}, \\ T_2 &= Q = 357,1 \text{ N}. \end{aligned}$$

126. ábra

FÉKEK

E helyen foglalkozunk a faiparban alkalmazott különböző fékező berendezések sztatikai vizsgálatával is.

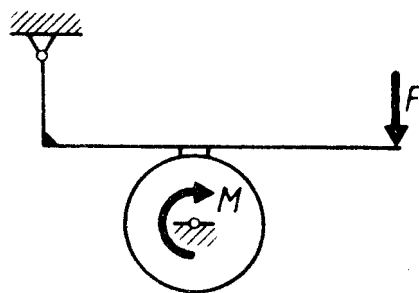
A legfontosabb két féktípus:

a pofás- és a szalagfékek.

Ún. egypofás féket szemléltet a 127. ábra.

Sztatikai szempontból a probléma az, hogy minimálisan mekkora F erőt kell a fékező karra kifejteni, hogy az M nyomatékú erőpárral terhelt fékdob nyugalomba maradjon. Vizsgáljuk a szerkezet részeinek egyensúlyát!

$$R\mu_0 N - M = 0, \quad N = \frac{M}{\mu_0 R}.$$



Ezután a fékező kar súlyából:

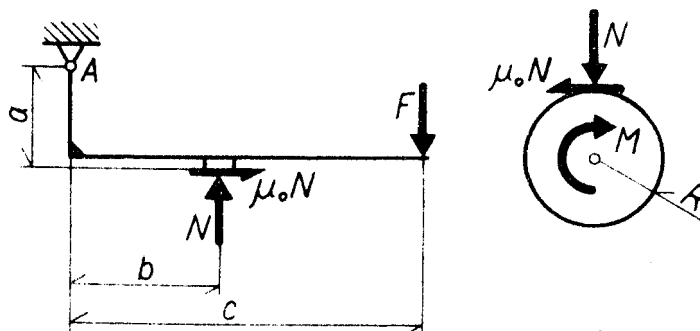
$$bN + a\mu_0 N - cF = 0, \\ F = N \frac{b + a\mu_0}{c}, \quad F = M \frac{b + a\mu_0}{\mu_0 Rc}.$$

127. ábra

Ha a dobra ható erőpár forgatónyomatéka ellenkező előjelű, hasonló számítással azt kapjuk, hogy $F = M \frac{b - a\mu_0}{\mu_0 cR}$.

Mint látható, a fékezőhatás most nagyobb.

Ilyen forgásmódnál $b < \mu_0 a$ esetén a fékezőerő 0, a fék önzáró. Ha az "a" távolság zérus, mindkét forgásmódnál egyenlő a fékezőhatás.



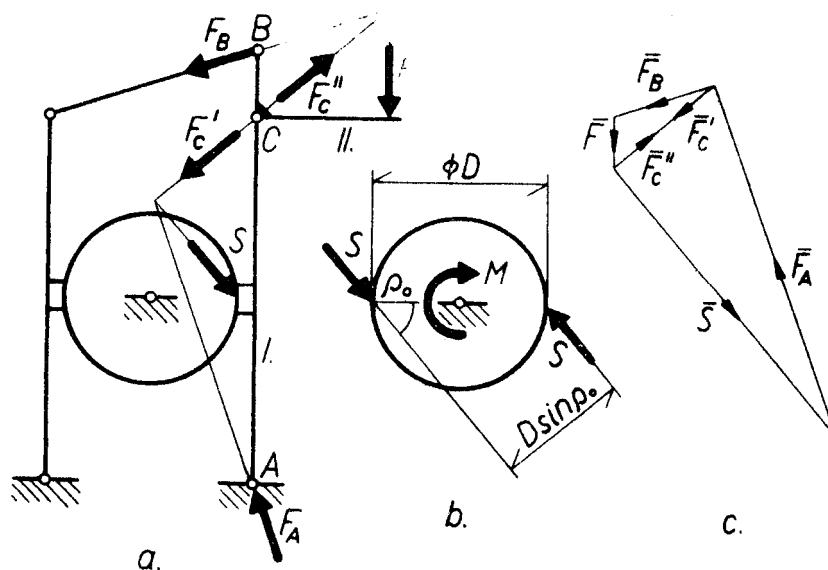
Az egypofás fék tengelyére,

128. ábra

fékezés közben egyoldali erőhatás érvényesül. Mint látni fogjuk, ez szilárdságtani szempontból kedvezőtlen, ezért (és nagyobb fékező hatása miatt) előnyösebb a fékdob két szemközti pontján elhelyezett fékpofával ellátott ún. kétpofás fék alkalmazása (129. ábra). Az ábrán szerkesztéssel mutatjuk be a fékezéshez szükséges F erő meghatározását, ismertnek tekintve a súrlódási szöget és a geometriai adatokat. A fékdobra ható súrlódó erők vektora meghatározható, ugyanis ezek erőpárt alkotnak, melynek alapja $S = \frac{M}{D \sin \rho_0}$.

$\bar{S}$ ismeretében, továbbá abból, Hogy II. test egyensúlyából a C-nél ható erő hatásvonala határozott, az I. testre ható erők vektorábrája megszerkeszthető.

Ezután az I. testre ható erők vektorábrája, s így $\bar{F}$ szintén szerkeszthetővé válik.



129. ábra

Végül tanulmányozzunk egy típust a szalagfékek közül!

Sztatikai szempontból a legérdekesebb az ún. különbözeti vagy differentiál fék. Ilyet ábrázol a 130. ábra, feltüntetve a D átmérőjű fékdobra és fékezőkarra ható kötélereket is. Legyen a dobra ható erőpár forgatónyomatéka M , s határozzuk meg a dob lefékezéséhez szükséges F erőt.

Az egyensúly határán a fékdobra ható erők S és $e^{\mu\alpha} = c$ jelöléssel cS . A fékdob egyensúlyából

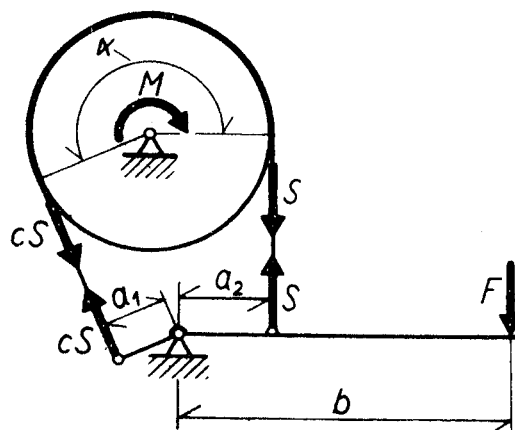
$$S = \frac{2M}{D(c-1)}.$$

Ezután a fékezőkarra ható erőknek a kar tengelyére felírt nyomatéka:

$$Sa_2 - cSa_1 - bF = 0, \quad S = \frac{bF}{a_2 - ca_1}.$$

Ezt egyenlővé téve S előbbi kifejezésével és a c értékét visszahelyettesítve;

$$F = \frac{2M(a_2 - a_1 e^{\mu\alpha})}{D(b \cdot e^{\mu\alpha} - 1)}.$$



130. ábra

Az összefüggésből megállapítható, hogy $a_2 \leq a_1 e^{\mu\alpha}$ esetén, a fék önzáró.

Mi történik a féktárcsa ellentétes forgása esetén?

A fentihez hasonló számítás szerint akkor

$$F = \frac{2M(a_2 e^{\mu\alpha} - a_1)}{Db(e^{\mu\alpha} - 1)}.$$

Azt látjuk, hogy most $a_2 \leq \frac{a_1}{e^{\mu\alpha}}$ esetén lesz önzáró a fék.

Végeredményül a következőt kapjuk:

$a_2 > a_1 e^{\mu\alpha}$: a fék mindkét forgásmód esetén használható,

$\frac{a_1}{e^{\mu\alpha}} < a_2 \leq a_1 e^{\mu\alpha}$: a fék az egyik forgásmód esetén önzáró,

$a_2 \leq \frac{a_1}{e^{\mu\alpha}}$: a fék mindkét forgásmód esetén önzáró.

I.20. A nyugalmi helyzet stabilitása

EGYENSÚLYI HELYZETEK

Ha a merev testet egyensúlyi helyzetéből kimozdítjuk, a testre ható erők már általában nem alkotnak egyensúlyi erőrendszert. Ha az erőrendszer olyan, hogy hatására a test (esetleg kisebb – nagyobb rezgések után) visszatér egyensúlyi helyzetébe, akkor biztos (stabilis) egyensúlyi helyzetben van. Ha tetszőlegesen kis mozdítás esetén a test eredeti helyzetétől még jobban eltávolodik, az egyensúlyi helyzet bizonytalan (labilis). Ha az eredeti helyzettel szomszédos helyzetekben a test szintén egyensúlyban van, az egyensúlyi helyzet közömbös (indifferens).

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy egy testnek, illetve mechanikai rendszernek több egyensúlyi helyzete is létezhet. Olykor az a cél, hogy közömbös egyensúlyi helyzetet állítsunk elő. Például a faipari forgácsoló gépek forgó részeit úgy készítik, hogy a súlypont a forgástengelyre essen.

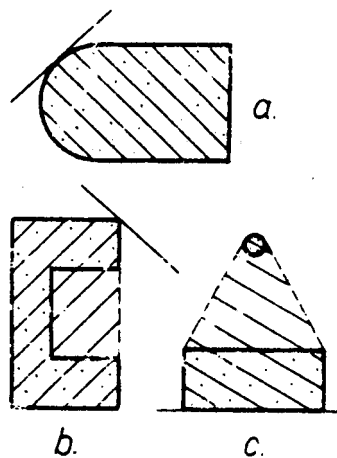
Különösen nagy gyakorlati fontossága van a biztos egyensúlyi helyzetnek.

ÁLLÁSSZILÁRDSÁG

A tapasztalatból ismert tény, hogy különböző, biztos egyensúlyi helyzetben lévő testek a feldöntéssel szemben más – más ellenállást tanúsíthatnak. Például egy téglafeldöntéséhez szükséges legkisebb erő különböző aszerint, hogy melyik lapján nyugszik a test.

A test az aljzattal valamilyen felület – többnyire síkidom- mentén érintkezik, melynek minden dA területű elemén dN normálerő és dS súrlódóerő ébredhet. A súrlódó erőkkel – melyek a test elcsúszását gátolják, vagy nehezítik – már korábban (I.17) foglalkoztunk.

A dN normálerők – általában megoszló – rendszere a test felé irányuló nyomóerő. Mindaddig, amíg az adott aktív erőrendszer esetén felírt egyensúlyi egyenletek olyan reakciót szolgáltatnak, melynek támadáspontja a támaszidomba esik és melynek normális összetevője a test felé mutat, a test szilárdan áll. Az imént említett támaszidom részletesebb megvilágítást igényel.



131. ábra

Ha a test támasztási pontjainak összessége konvex alakzat, akkor a támaszidom e pontok összessége (131/a ábra).

Ha a támasztó pontok nem alkotnak konvex* alakzatot (131/b, c ábra), akkor az alakzat konvex burkát tekintjük támaszidomnak.

Erről úgy alkothatunk képet, hogy gumifonalat képzelünk kifeszítve a támasztó pontokból álló idom köré. A 131. ábrán pontozással jelöltük a támasztó pontok alakzatát, sraffozással a konvex burkot.

A fejlődés mindig valamilyen él, illetve egyenes körül megy végbe, mely a támaszidomot érinti (illetve „súrolja” 131/b, c ábra).

Egy billenési tengelyre vonatkozó állásszilárdság, illetve a billenésveszély definiálása végett osszuk két részre a testre ható aktív erőket.

*Konvex egy alakzat, ha bármely két pontjának összekötő szakasza is az alakzathoz tartozik. 131. ábra

Jelölje M_0 azon erőkre a tengelyre vonatkozó nyomatékát, melyek a felbillenés ellen hatnak, M_b azon erők nyomatékát, melyek a billenést előidézni törekednek. A test állásszilárdságát, más szóval a stabilitás biztonságát a következő számmal jellemezzük:

$$n_b = \frac{M_0}{M_b}.$$

A következő esetek lehetségesek:

$n > 1$: a test biztos állású,

$n = 1$: a test a billenés küszöbén áll,

$n < 1$: a test felbillen.

Megemlítjük, hogy az állásszilárdságnak létezik más mértéke is, mint amelyet fentebb tárgyaltunk.

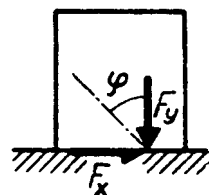
Az állásszilárdság geometriai mértéke valamely élre vonatkozólag az az α szög, amellyel a testet el kell dönteni, hogy az a legközelebbi labilis egyensúlyi helyzetbe jusson.

Dinamikai mértéke az egyensúlyban támadó, vízszintes és az említett élre merőleges erő, mely a test eldöntéséhez szükséges.

Mindegyik mérték szerint az állásszilárdság annál nagyobb, minél nagyobb a támaszidom, és minél mélyebben van a súlypont.

Beszélhetünk az elcsúszással szembeni biztonságról is. Elcsúszással szemben akkor biztosított a test, ha az aktív erők eredőjének a támaszszíkba eső összetevője kisebb, mint az ott ébredő súrlódó erő, vagyis a 132. ábra jelöléseivel:

$$|F_x| \leq \mu_0 |F_y|.$$



Az elcsúszással szembeni biztonság jellemzője:

$$n_{cs} = \frac{\mu_0 |F_y|}{|F_x|} = tg \rho_0 \frac{F \cos \varphi}{F \sin \varphi} = \frac{tg \rho_0}{tg \varphi}.$$

132. ábra

13. Példa

Számítsuk ki a lejtőn felfelé haladó G súlyú villás emelőtargonca stabilitásának biztonságát a targonca G súlyának, a Q teher és a geometriai adatok ismeretében (133. ábra).

Megoldás.

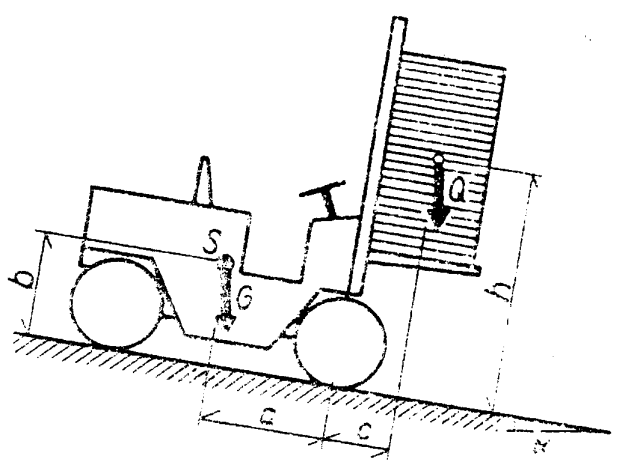
A felbillenést gátló aktív erő G , a billenésveszélyt előidéző erő Q . A billenés a targonca első kerekének érintkezési pontján átmenő, s a papír síkjára merőleges egyenes körül történhet.

Az ábrán S a targonca súlypontja.

$$M_0 = a \cos \alpha - bG \sin \alpha,$$

$$M_b = cQ \cos \alpha + hQ \sin \alpha,$$

$$n_b = \frac{G(a \cos \alpha - b \sin \alpha)}{Q(cQ \cos \alpha + hQ \sin \alpha)}.$$



133. ábra

II. SZERKEZETEK STATIKÁJA

II. 1. A tartószerkezetekről általában

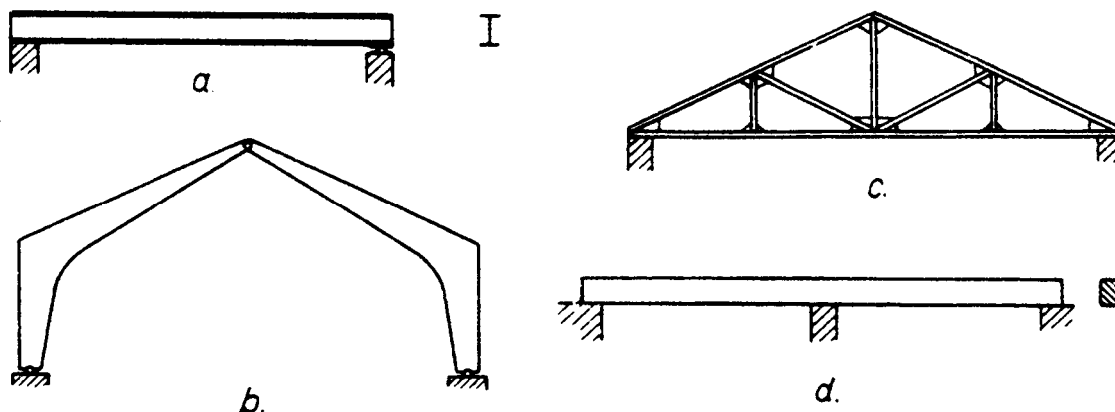
TARTÓSZERKEZETEK OSZTÁLYOZÁSA

A jegyzet II. részében olyan testekkel, illetve azok rendszerével foglalkozunk, melyek

- gyakorlati célt szolgálnak, terheket hordoznak,
- rájuk ható erők hatására merev alakzatként viselkednek,
- a környezethez vannak rögzítve.

Az ilyen testeket tartószerkezetnek, röviden tartónak nevezik. Számos változatuk van, áttekintésüket megkönnyíti az alábbi – nem teljes – osztályozás. A tartó lehet

- egy darabból álló (pl. I. szelvényű acélgerenda 134/a ábra),
- több darabból álló (pl. fából készült, ragasztott, háromcsuklós tartó 134/b ábra),
- tömör (pl. fagerenda 134/d ábra),
- rácsos (pl. tetőszerkezet főtartója 134/c ábra),
- sztatikailag határozott (pl. kéttámaszú tartó 134/a ábra),
- sztatikailag határozatlan (pl. háromtámaszú tartó 134/d ábra).



134. ábra

Sztatikailag határozott a tartó, ha támasztó erőrendszer sztatikai meggondolásokkal meghatározható, különben sztatikailag határozatlan.

Bizonyos tömör tartók esetében kijelölhető egy olyan egyenes, törött vonal, vagy görbe, melynek normálsíkjai a tartót egybevágó síkidomokban metszik. A síkidomok súlypontjai által alkotott vonal a tartó tengelye. Ha a tengely a hosszához képest a keresztmetszeti méretek elhanyagolhatóak, a tartót rúdnak nevezik. Néhány gyakran előforduló alakot szemléltet a 135. ábra.

135/a: egyenes tengelyű, prizmatikus rúd,

135/b: egyenes tengelyű, változó keresztmetszetű rúd,

135/c: tört tengelyű, prizmatikus rúd,

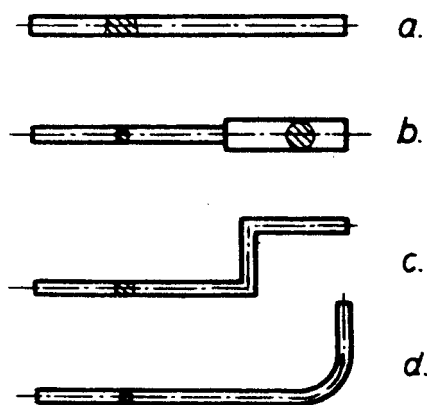
135/d: görbe tengelyű, prizmatikus rúd.

TARTÓK MEGTÁMASZTÁSA

A tartók mechanikai vizsgálatának végső célja a tartó ésszerű méreteinek meghatározása, illetőleg adott tartó megítélése a teherviselés, deformálódás stb. szempontjából.

E cél eléréséhez ismerni kell a tartó igénybevételeit, azaz a tartót érő összes erőhatást. Az igénybevételek meghatározása sztatikai módszerekkel történik. Mivel a tartót terhelő erőrendszerbe nem csak az ismert aktív erők tartoznak, hanem a tartót a környezethez rögzítő elemek által gyakorolt reakcióerők is, szükséges a kényszerekkel kapcsolatban elmondottakat (I.4.) kiegészíteni.

Egyelőre csak olyan kényszerek jöhetnek szóba, melyek a tartót nem teszik sztatikailag határozatlanná.

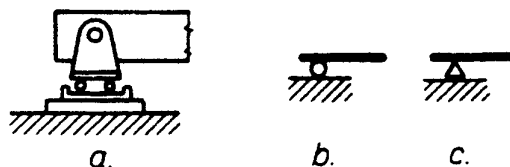


135. ábra

Mozgó saruval történő megtámasztást szemléltet a 136. ábra. Műszakilag különbözőképpen valósítható meg a mozgó saru (mozgó csukló). Sztatikai szempontból a lényeg az, hogy a reakció erő hatásvonala a támasztó síkra merőleges.

Ez a megfogási mód a tartó tengelyirányú mozgását nem akadályozza, a számítások során egyetlen ismeretlen reakciókomponenst jelent, az erő nagyságát.

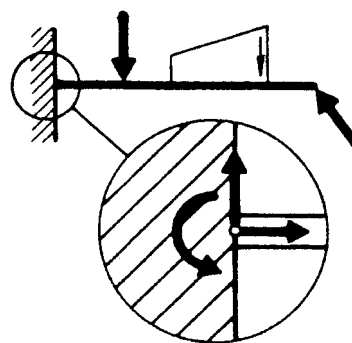
A mozgó saru jelképes ábrázolását a 136/b, c ábrák mutatják (mi a továbbiakban a 136/b ábra szerint fogjuk jelölni az ilyen megfogást). Korábban (I.14) megismertük már a befogást, mint kényszert.



136. ábra

Most az ott elmondottakat azzal egészítjük ki, hogy a befalazott tartórészre ható reakcióerő-rendszert arra a pontra fogjuk redukálni, melyben a tartó tengelye a befogás síkját dőfi (137/b ábra).

Megemlítjük továbbá, hogy egy tartó minden elmozdulását kizáró megfogás nem csupán a tartó egy részének befalazásával, hanem más módon, például megfelelően elhelyezett rudak segítségével is megvalósítható.



137. ábra

II.2. Egyszerű rácsos tartók

RÁCSOS TARTÓ

Gyakorlatilag nagy jelentőségűek az olyan tartószerkezetek, melyeket rudakból, s a rúdtengelyek metszéspontjánál – a csomópontoknál – elhelyezett csomólemezekből építenek fel hegesztéssel, csavarozással, szögeccseléssel vagy ragasztással. A szerkezet részei egymáshoz képest nem mozognak el. Az ilyen tartószerkezet a rácsos tartó. Ilyeneket alkalmaznak a könnyűszerkezetes építészetben, rácsos szerkezet igen sok híd, daru, darupálya, elektromos vezetékoszlop stb. A továbbiakban csupán olyan rácsos tartókkal foglalkozunk, melyeknél a rúdtengelyek ugyanazon síkban helyezkednek el. Ezek a síkbeli rácsos tartók.

A rácsos tartót általában az aktív erőkől és a támasztó (reakció) – erőkől álló külső erőrendszer terheli. A szerkezet elemei azonban egymásra is hatást gyakorolnak, belső erők lépnek fel, melyek a rudakat húzásra, vagy nyomásra veszik igénybe.

A rácsos tartókkal kapcsolatos jellegzetes sztatikai probléma e rudakat terhelő erők meghatározása. Hogy e feladatot a sztatika módszereivel megoldhassuk, bizonyos egyszerűsítő feltevésekkel élünk.

Feltesszük, hogy

- a rudak sima csuklókkal kapcsolódnak egymáshoz,
- a rudak merevek és súlytalanok,
- az erők (aktív – és reakcióerők) mind a tartó síkjában hatnak,
- a terhelő erők csak a csomópontokon működnek,
- a külső erők egyensúlyi erőrendszert alkotnak.

Különösen az első feltevés tűnhet merésznek, összehasonlítva az ideális csuklót pl. egy hegesztéssel kialakított csomóponttal. A kísérletek azonban azt igazolták, hogy a valóságos szerkezetek sztatikai viszonyai jó egyezést mutatnak, a feltevéseink alapján megállapított erőjátékkal.

EGYSZERŰ RÁCSOS TARTÓ

A síkbeli rácsos tartók közül is csak egy bizonyos – bár a legtöbb, gyakorlatilag fontos típust felölelő – csoporttal foglalkozunk. Kizárólag háromszög-képzésű tartókra szorítkozunk.

Kiindulhatunk ugyanis a legegyszerűbb, merev rudakból összeállított szerkezetből, egy rúdháromszögből. A 138. ábrán ez legyen az A, B, C háromszög. Minden további csomópontot – például D, E -t – két újabb rúddal kapcsolunk az addig felépített szerkezethez. Az ilyen módon előállított tartót nevezzük háromszögmépzésű vagy egyszerű rácsos tartónak.

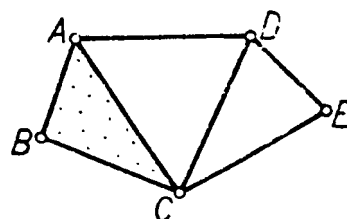
Ha a rudak számát r , a csomópontok számát c jelöli, megállapíthatjuk, hogy a kiinduló háromszöget elhagyva minden csomópontra két rúd jut, tehát

$$r - 3 = 2(c - 3), \text{ vagyis } r = 2c - 3.$$

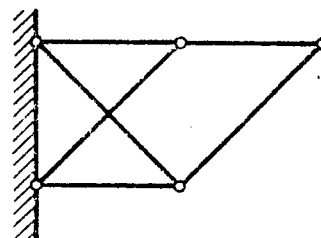
Tehát a rudak száma a csuklók számának kétszeresénél hárommal kisebb. A tartó felépítése úgy is lehetséges, hogy a szilárd alaphoz – például egy függőleges falhoz – kapcsoljuk a szerkezet első csomópontját, a következőket szintén az alaphoz, vagy a már meglévő szerkezethez (139. ábra). Ilyenkor minden új csomópont létesítéséhez két új rúd szükséges, tehát

$$r = 2c.$$

A 139. ábrából is kitűnik, hogy a háromszög-képezésű rácsos tartó nem feltétlenül csupa háromszögből áll.



138. ábra



139. ábra

RÚDERŐ

A rácsos tartó rúderőinek helyes értelmezése végett kiegészítjük a rúddal kapcsolatban korábban (I.4.) elmondottakat.

Mint kikötöttük, a rácsos szerkezet a terhelést a csomópontokon kapja. Célszerű úgy elképzelni, hogy a terhelés közvetlenül a csapszegekre hat. Egy csapszegre ható terhelés és a rudak által csapszegre gyakorolt erők közös metszéspontú, síkbeli egyensúlyi erőrendszert alkotnak. A rúdvég által a csapszegre gyakorolt S erő a rúderő.

A rúd másik vége természetesen ellentétes vektorú erőt fejt ki a szomszédos csapszegre. A csapszegek által a rúdvégekre gyakorolt erők a csuklóerők. Ha ezek a rúd felé mutatnak (19/c ábra), a rúd nyomott, a rúderő negatív és így jelöljük: Pl. $S = 6kN(-)$. Ellenkező esetben (19/b ábra) a rúd húzott, a rúderőt pozitívnak tekintjük. Ilyen értelmezés és jelölés esetén – ha szükséges – a rúdvégekre ható erők (egymással ellentétes) vektorait mindig előállíthatjuk. A rúderővel kapcsolatban zavar abból szokott keletkezni, ha nem tisztázzuk, hogy adott esetben a

rúdvég által a csapszegre, vagy a csapszeg által a rúdvégre gyakorolt erőről van-e szó, vagyis rúderőről, vagy csuklóerőről.

II.3. Csomóponti módszer, Cremona - erőterv

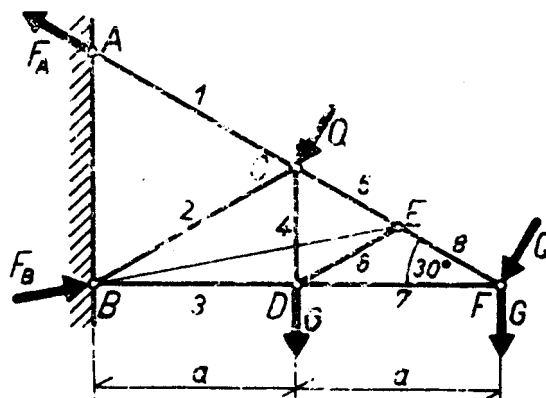
CSOMÓPONTI MÓDSZER

Az egyik legegyszerűbb rúderő – meghatározási módszer elve a következő: ha a rácsos tartó egyensúlyban van, részeit, tehát a csomópontokat is egyensúlyi erőrendszerek (aktív erők és rúderők) terhelik.

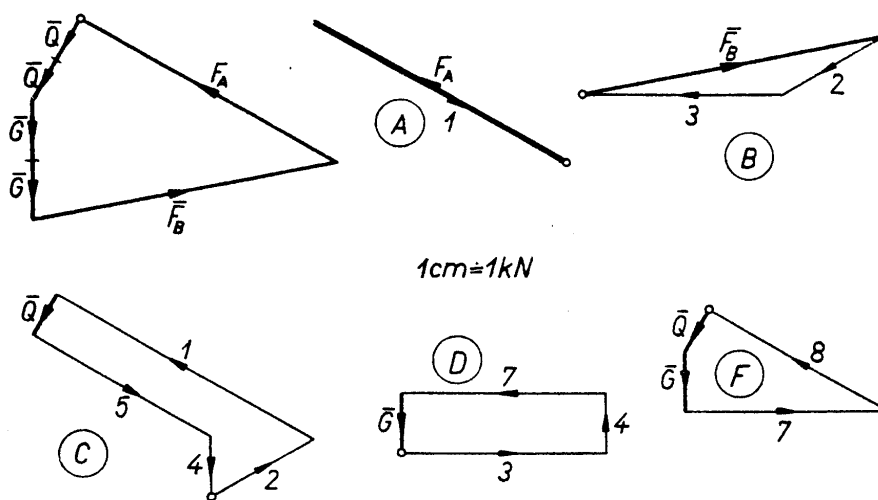
Egy – egy csomópontot terhelő közös metszéspontú síkbeli erőrendszer egyensúlyát számítással vagy szerkesztéssel vizsgálva az ismeretlen rúderők minden olyan esetben meghatározhatók, amikor az ismeretlen rúderők száma nem több mint kettő. Hogy egyszerű rácsos tartók esetén elegendő egyenletet írhatunk fel a rúderők meghatározására, az így látható be: a c darab csomópont mindegyikére felírhatunk két egyenletet $|\sum F_x = 0, \sum F_y = 0|$, összesen $2c$ egyenletet. Mivel három egyenletet felhasználunk a támasztó erőrendszer meghatározására, végeredményben $2c-3$ egyenlettel rendelkezünk rúderő – meghatározásra. Ez azonban a II.1. tárgypontban látottak szerint éppen egyenlő a rudak számával.

A módszer alkalmazását példán mutatjuk be. Legyen a vázolt rácsos tartó (140. ábra) terhelő erőrendszerében $Q = 0,8 \text{ kN}$, $G = 1,0 \text{ kN}$.

Célszerű a csomópontokat megbetűzni, a rudakat megszámozni, s alkalmas erőmérőket felvenni. Ezután meghatározzuk az F_A, F_B reakcióerőket. Ezek és a terhelő erőrendszer eredőjének hatásvonala E -ben metsződik. A G, G és a Q, Q erők részeredői ugyanis E -ben metszik egymást, F_A hatásvonala pedig AC egyenes. Most már előállítható a külső erők vektorábrája (141. ábra). Ezután szerkesztjük meg az egyes csomópontok vektorábráit, szem előtt tartva, hogy egy – egy csomópontban legfeljebb két ismeretlen rúderő meghatározására van mód.



140. ábra

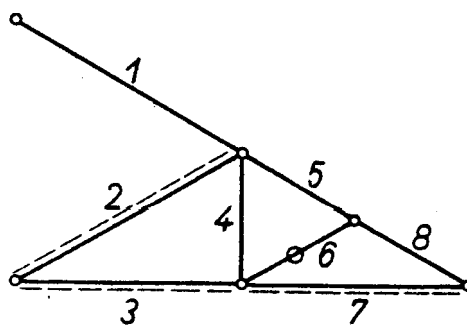


141. ábra

- A:** Két erő tart egyensúlyt: F_A és S_1 . Megjegyezzük, hogy a vektorábrákban az egyes rúderővektorok mellé csak a megfelelő rúd számát írtuk. A következő csomópont B vagy F lehet.
- B:** A 2 és 3 rudakkal párhuzamost húzva kapjuk S_2 és S_3 rúderőket. Mindkét rúd nyomott. Ez rögtön belátható, ha a rúdvégekhez a rúderőkkel ellentétes vektorú csuklóerőket képzeljük.
- C:** Itt már két rúderőt (S_1, S_2) ismerünk. Vektoraik az A és B csomópontokhoz tartozó vektorábrák megfelelő vektoraival ellentétesek. Ismertté válik S_4 és S_5 .
- D:** Az ismertté váló rúderők S_7 és az $S_6 = 0$. Az ilyen rudat, melyben nem ébred rúderő, vakrúdnak nevezik.
- E:** Ismertté válik S_8 .

Eredményeinket táblázatba foglaljuk.

A rúderő		
jele	Nagysága (kN)	Értelme
1	4,85	+
2	1,94	-
3	3,32	-
4	1,00	+
5	3,35	+
6	0	
7	3,32	-
8	3,42	+



142. ábra

Oldjuk meg a feladatot számítással is!
Reakcióerő – meghatározás:

$$\sum M_B = \frac{3}{2}a \frac{1}{\cos 30^\circ} 2Q + \frac{3}{2}a \cdot 2Q - 2a \cdot \sin 30^\circ F_A = 0,$$

$$F_A = 4,848 \text{ kN.}$$

$$\sum F_x = -F_A \cos 30^\circ - 2Q \cdot \cos 60^\circ + F_{B_x} = 0,$$

$$F_{B_x} = 4,998 \text{ kN.}$$

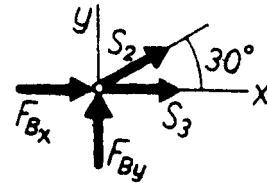
$$\sum F_y = F_A \sin 30^\circ - 2Q \cdot \cos 30^\circ - 2G + F_{B_y} = 0,$$

$$F_{B_y} = 0,962 \text{ kN.}$$

A rúderők meghatározását bármely olyan csomópontnál elkezdhetjük, ahol az ismeretlen rúderők száma nem nagyobb kettőnél. Ilyen például a B csomópont.

A 143. ábra a B csomópontra ható S_2, S_3 rúderőket és F_B összetevőit szemlélteti.

A számító eljárásnál célszerű húzott rudakat feltételezni, mert így a számítás a rúderőket előjelhelyesen szolgáltatja, függetlenül attól, hogy a szóban forgó csomópontokra ható erők irányát helyesen vagy tévesen vettük –e fel. Írjuk fel az egyensúlyi feltételeket a B csomópontra!

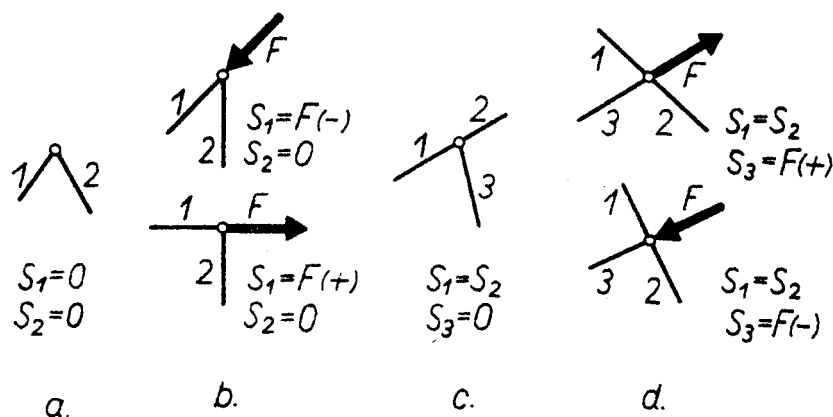


143. ábra

$$\uparrow F_{By} + S_2 \sin 30^\circ = 0,962 + S_2 0,5 = 0, \quad \underline{S_2 = 1,924(-)}.$$

$$\rightarrow F_{Bx} - 1,924 \cos 30^\circ + S_3 = 4,998 - 1,666 + S_3 = 0, \quad \underline{S_3 = 3,332(-)}.$$

Mielőtt a számítást folytatnánk, rámutatunk arra, hogy bizonyos esetekben egy – egy csomópont egyensúlya számítás nélkül áttekinthető. Erről győz meg a 144. ábra, mely néhány különleges alakú, illetve különleges terhelésű csomópontot szemléltet. Az ábrarészletekhez írt kijelentések helyessége a csomópontok egyensúlyának vizsgálatával igazolható.



144. ábra

Példánk megoldását folytatva a fentiek alapján nyilvánvaló, hogy $\underline{S_6 = 0}$, $\underline{S_4 = G = 1kN(+)}$, $\underline{S_7 = S_3 = 3,332kN(-)}$.

Csupán az F csomópont egyensúlyát kell még számítással vizsgálni.

$$\uparrow -Q \cos 30^\circ - G + S_8 \sin 30^\circ = 0 \quad \underline{S_8 = 3,386kN(+)}.$$

$$\rightarrow -Q \sin 30^\circ - 3,386 \cos 30^\circ - S_7 = 0, \quad \underline{S_7 = 3,332kN(-)}.$$

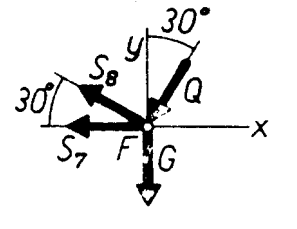
Az E csomópont egyensúlyából: $\underline{S_5 = S_8 = 3,386kN(+)}.$

Végül $\underline{S_1 = F_A = 4,848kN(+)}.$

MEGJEGYZÉS

Vegyük észre, hogy a szerkezet méreteit (azaz a távolságot), nem használtuk fel. Csupán a szerkezet alakjára, nem méreteire volt szükség. A számító módszer előnye – a tetszőlegesen növelhető pontosság – példánkon is tapasztalható.

A számított értékektől a szerkesztéssel nyert rúderő – értékek néhol, kis mértékben eltérnek.



145. ábra

CREMONA – ERŐTERV

A csomóponti módszer grafikus változatának alkalmazása során általában minden rúderő kétszer szerepel a vektorábrákban. Kézenfekvő kérdés: nem lehetne – e a vektorábrák alkalmas összeillesztésével egyetlen olyan ábrát előállítani, melyben mindegyik rúderőt egyetlen szakasz képvisel. Ez valóban lehetséges néhány egyszerű szabály betartásával.

A módszer a következő:

- meghatározzuk a reakcióerőket,
- választunk egy (óramutató járásával egyező vagy ellentétes) körüljárás módot,
- a külső erők vektorait a választott körüljárás mód sorrendjében összegezzük,
- a grafikus csomóponti módszert alkalmazva minden csomópont vektorábráját előállítjuk oly módon, hogy a vektorok a választott körüljárás mód sorrendjében kövessék egymást,
- az egyes rúderők nagyságát és értelmét megállapítva rúderő-táblázatot készítünk.

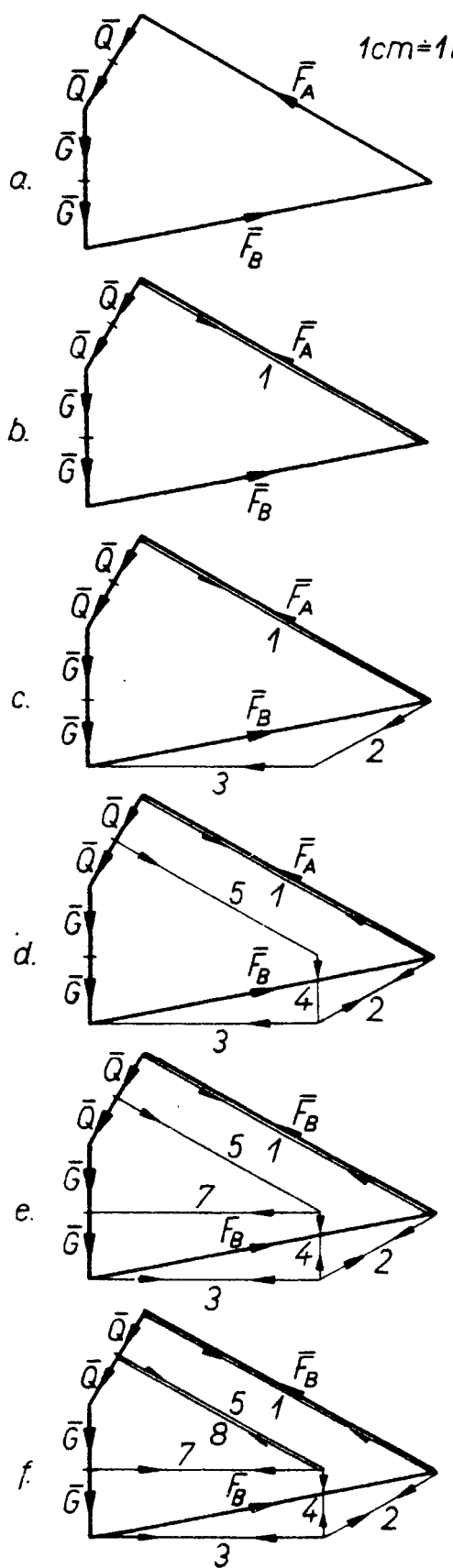
Az eljárást lépésről – lépésre követhetjük a 146. ábrán, melyhez még a következőket bocsátjuk előre: a külső erők vektorait célszerű vastagabban megrajzolni, a rúderőket vékonyabban. Ezen az ábrán a rúderő vektorok nyilait is feltüntettük. A nyilakat gyakran mellőzik.

A szerkesztés eredményeként kapott, minden rúderő vektort tartalmazó ábra a Cremona – erőterv.

Megjegyezzük, hogy nem minden rácsos tartóhoz szerkeszthető Cremona – erőterv. Ha például a tartó olyan csuklót is tartalmaz mely a tartó hálózatainak határán belül van, nem szerkeszthető erőterv.

Ezek után kövessük végig az erőterv felépülését!

A 146. ábra a 140. –kel együtt tanulmányozandó.



A külső erőket az óramutató járásával azonos körüljárás mód sorrendjében összegezzük.

1cm=1kN

Az A csomópontban egyensúlyozunk, ismeretessé válik $S_1(+)$.

A B csomópontban egyensúlyozunk, ismeretessé válik $S_2(-)$ és $S_3(-)$.

A C csomópontban egyensúlyozunk, ismeretessé válik $S_5(+)$ és $S_4(+)$.

A D csomópontban egyensúlyozunk, ismeretessé válik $S_6 = 0$, $S_7(-)$.

Az F csomópontban egyensúlyozunk, ismeretessé válik $S_8(+)$.

Az E csomópontban történő egyensúlyozásnál új vonalak berajzolására nincs szükség, csupán az 5 és 8 jelű szakaszokat kellene ellátni a még hiányzó nyilakkal.

146. ábra

MEGJEGYZÉS

Megtörténhet, hogy a Cremona – erőtervben két vagy több rúderőt képviselő szakasz is egybeesik, mint ábránkon az 5,8 jelű rudaknak megfelelő szakaszok. Ilyenkor célszerű az egyébként egybeeső szakaszokat egymáshoz képest kissé eltolva megrajzolni. Az erőterv – szerkesztés rajztechnikailag igényes feladat. A nem elég gondos munkán kívül további hibaforrások:

A külső erőket nem a választott körüljárás mód szerint hordjuk fel (a külső erőket mindig a tartó hálózataán kívül vegyük fel), egy – egy csomópont rúderő – vektorai nem alkotnak ábránkon záródó vektorsokszöveget.

II.4. Átmetsző módszer

AZ ÁTMETSZÉS LÉNYEGE

A kissé nehézkes csomóponti módszer, sőt az erőterv – szerkesztés is felesleges munkával jár, ha csak a rácsos tartó egyik – másik rúdjának igénybevételét kívánjuk meghatározni. Ilyen esetekben az átmetszés módszere előnyös.

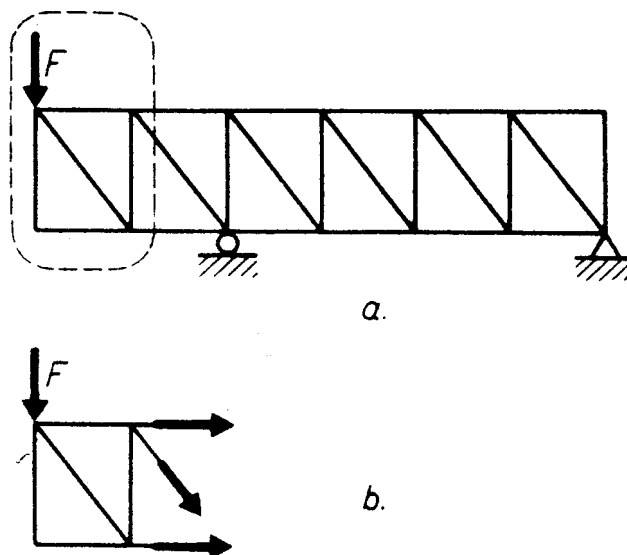
Az átmetszés elve a következő: az egyes csomópontok egyensúlya helyett vizsgálhatjuk a szerkezet egy részének, (például a 147. ábrán látható tartó szaggatott vonallal elkülönített részének) egyensúlyát is. Egy ilyen, két részre osztott tartódarabra a következő erők hatnak:

- külső aktív és esetleg reakció/erők,
- az átvágott rudak csonkjain ható (rúdírányú) erők.

Ez utóbbiak a szerkezet egészét tekintve belső erők, de ha csak az elkülönített tartódarabot tekintjük, akkor külsők.

Ha az átmetszést fizikailag megvalósíthatnánk, akkor a rúdcsomók metszésfelületein ezeket az erőket valamilyen módon működtetni kellene a nyugalmi helyzet további fenntartása végett.

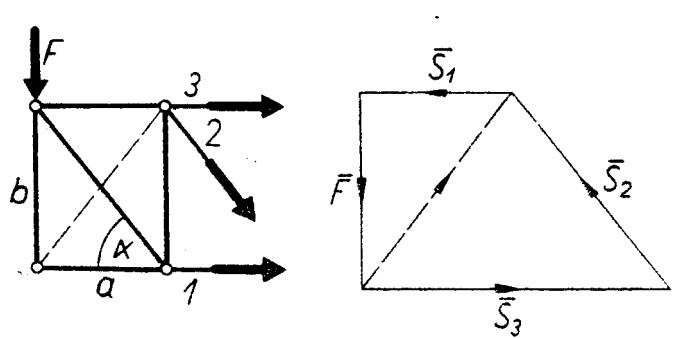
Az átmetszéssel feltárt belső erők a tartódarabra ható aktív erőket egyensúlyozzák. Ha ezt az egyensúlyozó erőrendszert előállítjuk, akkor egyben az átmetszett rudak rúderőit határozzuk meg. Ez a feladat számos esetben megoldható.



147. ábra

CULMANN ÉS RITTER MÓDSZEREK ALKALMAZÁSA

Legtöbbször hármas átmetszésről van szó, vagyis három rudat metszünk át. Ilyenkor a feladat az elkülönített szerkezet részre ható erőrendszer egyensúlyozása három hatásvonalon. Ez a helyzet a 147. ábrán látható tartónál is. Az F erőt kell egyensúlyozni az átmetszett rudak tengelyein, mint hatásvonalakon. A feladatot szerkesztéssel Culmann, számítással Ritter oldotta meg, amint azt I.11-ben láttuk. A szerkesztés a következő lehet (148. ábra):



148. ábra

Az 1 jelű hatásvonal és F hatásvonalának metszéspontját összekötjük 2 és 3 hatásvonalak metszéspontjával, ez lesz a **segédhatásvonal**. Először ezen és az 1 hatásvonalon egyensúlyozunk, kapjuk $S_1(-)$ -et. Ezután a segédvonalon működő erőt felbontjuk 2 és 3 irányú erőkre, így nyerjük az $S_2(-)$ és $S_3(+)$ rúderőket.

Határozzuk meg most számítással $S_1(-)$ -et !

Ritter szerint a 2 és 3 hatásvonal metszéspontjára célszerű felírni a tartódarabra ható összes erő nyomatékát.

Tehát

$$\curvearrowright aF + bS_1 = 0, \quad S_1 = \frac{a}{b} F(-).$$

Megjegyezzük, hogy a számító módszer alkalmazása során a rúdcsonkokra ható erőket célszerű húzóerőknek venni. Ha az erő nagysága negatívnak adódik, az azt jelenti, hogy feltevésük téves volt, a rúd nyomott.

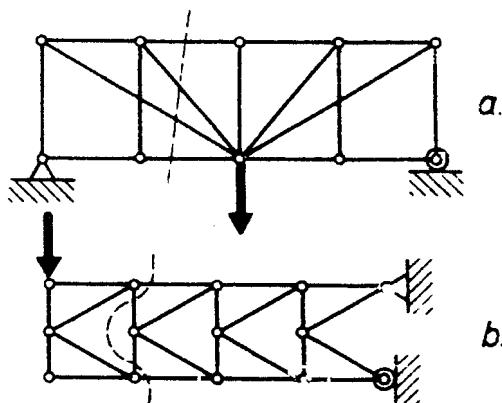
NÉHÁNY KÜLÖNLEGES ESET

A Ritter – féle számítás nem vezet célra példánkban a kettőjelű a 2 jelű rúd esetén. Ilyenkor egyszerűbben járhatunk el. Írjuk fel az alkalmas komponens – egyenletet:

$$\uparrow -F - S_2 \sin \alpha = 0, \quad S_2 = F \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} (-).$$

A 148. ábrán a 2 jelű rúdcsonkra rajzolt erőjelkép iránya tehát nem a valóságnak megfelelő. Megemlítjük, hogy példánk lényegét tekintve azonos az I.11-ben tárgyalt 9. példával. Erre a tényre mutat példát a 149. ábrán látható két tartó.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy példáinkban (a149/a a kivétel) az átmetszett rudakban ébredő erők meghatározásához nincs szükség a reakciók ismeretére. Általában célszerű az átmetszett tartó azon darabjának vizsgálata, melyre reakcióerők nem hatnak.



149. ábra

II.5. Csuklós szerkezetek

SÍKBELI CSUKLÓS SZERKEZETEK

Gyakran találkozunk olyan, rudakból és csuklókból felépített szerkezetekkel, melyekre a következők jellemzők:

- a rúdtengelyek egy síkban vannak,
- a külső erők a rudak síkjában hatnak,
- a rudak sima csuklókkal kapcsolódnak.

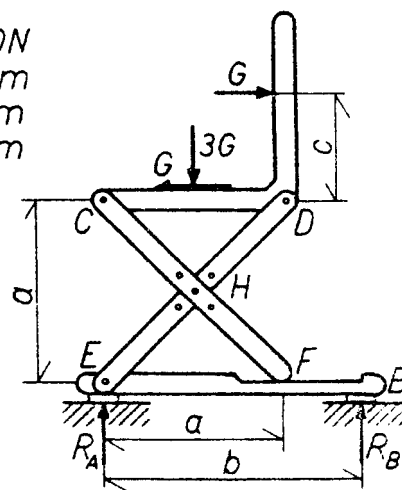
Az ilyen szerkezetek a síkbeli (egyszerű) csuklós szerkezetek. A csuklótengelyek általában a rudak síkjára merőlegesek. E szerkezetek – a rácsos tartókkal ellentétben – nem csak csuklókon vannak terhelve. A szerkezetet alkotó rudak gyakran görbe – vagy tört – tengelyűek. A mechanikai probléma az ismert aktív erők hatására ébredő külső és belső reakciók meghatározása. Hogy érthetőbb legyen a feladat, végezzük el a 150. ábrán látható gyermekbútor, - egy állítható magasságú szék – sztatikai vizsgálatát.

A szék magassága a H furatban elhelyezett csappal szabályozható. A lényeges problémák a következők:

1. a padló által a székre gyakorolt erők meghatározása (külső reakciók),
2. a szerkezet elemei által, a csapszegek közvetítésével egymásra gyakorolt erők meghatározása (belső reakció).

Itt nem boldogulunk a csomópontok egyensúlyának vizsgálatával. Ugyanis általában nem ismerjük a csomópontokra ható erők irányát.

$$\begin{aligned} G &= 100\text{ N} \\ a &= 0,5\text{ m} \\ b &= 0,7\text{ m} \\ c &= 0,3\text{ m} \end{aligned}$$



150. ábra

Az általános érvényű számító módszert ismertetjük,

kitűzött feladatunkra alkalmazva. A szék terhelésével kapcsolatban megjegyezzük, hogy a valóságban megoszló erők eredőjét jelképezik a 150. ábrán látható G, 3G koncentrált erők.

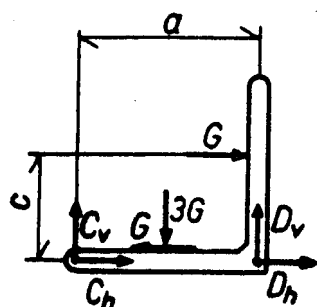
Először az egész szerkezet – mint merev test – egyensúlyát vizsgáljuk:

$$\curvearrowleft bR_B - \frac{a}{2}3G - cG = 0, \quad R_B = \frac{G}{b} \left(\frac{3}{2}a + c \right), \quad \underline{R_B = 150\text{ N.}}$$

$$\uparrow R_A + R_B - 3G = 0, \quad R_A = 3G - R_B, \quad \underline{R_A = 150\text{ N.}}$$

Ezután a belső reakciókat vizsgáljuk meg. A szerkezet egészének egyensúlyából a külön – külön vizsgálható részek egyensúly következik.

Először is vázoljuk a szerkezet – részekre ható erőket (151. ábra).



151. ábra

A C és D pontokban ható erők irányát nem ismerjük. E belső reakciókat most pozitív irányúnak feltételezett, összetevőkkel ábrázoljuk.

A „horizontális” és „vertikális” összetevők mellé írt jel ($C_h, C_v \dots$) nem komponenseket, hanem az összetevők nagyságát jelöli. Ha esetleg negatív értéket kapnánk rájuk, az összetevők irányát meg kell fordítani. Két összetevő nagyságát már meg tudjuk határozni:

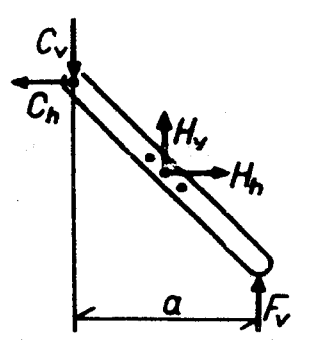
$$\begin{aligned} \curvearrowleft C \quad aD_v - \frac{a}{2}3G - cG &= 0, & D_v &= \frac{G}{a} \left[\frac{3}{2}a + c \right], & \underline{D_v = 210N.} \\ \uparrow C_v - 3G + D_v &= 0, & C_v &= 3G - D_v, & \underline{C_v = 90N.} \end{aligned}$$

Nézzük most a CF láb egyensúlyát (152. ábra)!

Az F pontban ható erőre a sima támasztás miatt $F_h = 0$.

A C pontban ható összetevőket az akció – reakció – elvnek megfelelően a 151. ábrához képest fordított nyíllal rajzoltuk meg. A H pontban, közelebbi adat híján pozitív irányú összetevőket veszünk fel.

Az F_v összetevő meghatározása végett tekintsük az AB szerkezeti elem elhagyásával kapott test egyensúlyát:



$$\curvearrowleft C \quad aF_v - cG - \frac{a}{2}3G = 0, \quad F_v = G \left[\frac{c}{a} + \frac{3}{2} \right], \quad \underline{F_v = 210N.}$$

Ezután a CF rúd egyensúlyából:

$$\uparrow -C_v + F_v + H_v = 0, \quad H_v = C_v - F_v, \quad \underline{H_v = -120N.}$$

H_v irányát tehát tévesen vettük fel!

$$\curvearrowleft C \quad aF_v + \frac{a}{2}H_h - \frac{a}{2}H_v = 0, \quad H_h = 2 \left[\frac{H_v}{2} - F_v \right], \quad \underline{H_h = -300N.}$$

H_h irányát is ellentétes a 152. ábrán jelzett iránnyal!

$$\rightarrow -H_h - C_h = 0, \quad C_h = -H_h, \quad \underline{C_h = -300N.}$$

C_h tehát pozitív irányú!

Ismét a 151. ábra alapján adódik:

$$\underline{D_h = 300N.}$$

Az E_h, E_v összetevők meghatározása ezek után nem probléma.

II.6. Az egyenes rúd igénybevételei

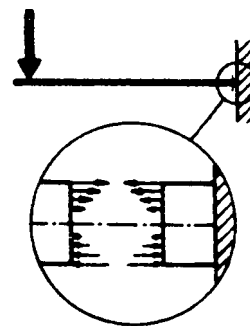
BELSŐ ERŐK

A továbbiakban síkbeli tömör tartókkal foglalkozunk*.

Bevezetésként vegyük szemügyre, hogy mi történik akkor, ha egy valóságos (tehát nem merev) testet, például egy ún. konzol tartót tönkremenetelig terhelünk.

A tapasztalat és a 153. ábra tanúsága szerint a befogás síkjához közeli rúdszelvények valamelyikében (a szelvény kisebb – nagyobb környezetében) a rúd deformálódik: repedések, gyűrődések keletkeznek rajta, a tengelyvonal meggörbül.

Az ábra kinagyítva mutatja a rúdnak a szelvény által felosztott két részét. A viszonyok jobb áttekintése végett, a valóságban összefüggő rúdrészeket kissé szétválasztva ábrázoltuk.



153. ábra

E belső erők nem lehetnek akármekkoraak. Határt szab az anyag szilárdsága. A szilárdságtan egyik feladata éppen az, hogy megállapítsa: mekkora belső erők léphetnek fel a szerkezetekben a tönkremenetel veszélye nélkül.

A fentiekből kitűnhetett, hogy ismernünk kell a tartókban fellépő belső erőket.

Bár a belső erők megoszlásáról a sztatika nem ad felvilágosítást, egy lényeges kapcsolat könnyen megállapítható a tartóra ható külső és belső erők között.

Tekintsük a 154. ábrán látható, egyensúlyi erőrendszerrel terhelt rudat, melyen kijelöltünk egy K szelvényt.

Bevezetjük, a következő definíciókat:

Bal oldali erőrendszer:

A K szelvénytől balra lévő tartórészre ható erők rendszere.

Jelölése: (F_b)

Ábránkon az $/F_1, F_2, F_3/$ erőrendszer.

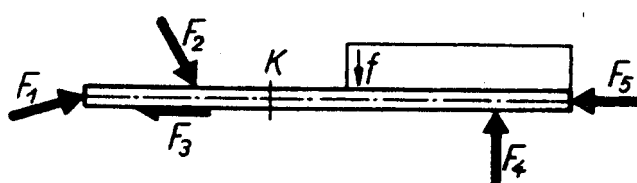
154. ábra

Jobb oldali erőrendszer: a K szelvénytől jobbra lévő tartórészre ható erők rendszere.

Jelölése: (F_j)

Ábránkon az $/F_4, F_5, f/$ erőrendszer.

Egyelőre nem foglalkozunk olyan esettel, mikor a Szelvényben is hat erő.



*Amelyeket síkbeli erőrendszer terhel.

Tétel: ha az egyensúlyban lévő rúd valamely K szelvényétől jobbra eső tartódarabra ható belső erőrendszer (B_j) (155. ábra), a bal oldali erőrendszer (F_b) , akkor

$$(F_b) \doteq (B_j).$$

Bizonyítás: $(F_b, F_j) \doteq 0$

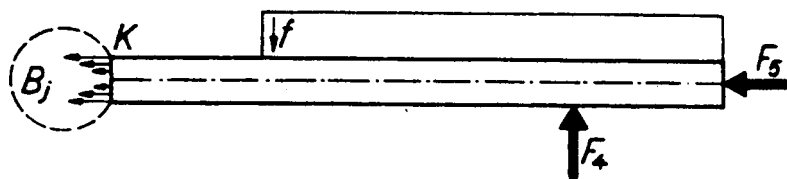
$$(B_j, F_j) \doteq 0$$

$$(F_b) \doteq (B_j)$$

Nyugalomban lévő testről van szó.

A jobb oldali rúdrész is nyugalomban van F_b – hez és B_j – hez létezik egy olyan harmadik erőrendszer $/ F_j /$ mely mindkét erőrendszerrel egyenértékű.

A tétel értelmében a (szilárdságtani számításokhoz szükséges) belső erőrendszerrel egyenértékű erőrendszert sztatikai úton meg tudjuk határozni.



155. ábra

A tartóra ható erőrendszerről egyelőre feltesszük, hogy síkbeli erőrendszer, tehát eredője egyetlen erő, erőpár, vagy zérus erő.

IGÉNYBEVÉTELEK

A bal oldali erőrendszerrel egyenértékű (B_j) erőrendszer a K szelvény igénybevétele.

A (B_j) erőrendszer eredőjének a rúd tengelyéhez, illetve a szelvényhez viszonyított helyzete lényeges a rúdra kifejtett mechanikai hatás szempontjából. E helyzet és az eredő milyensége alapján a következő ún. alap igénybevételeket különböztetünk meg:

- a (B_j) erőrendszer eredője egyetlen erő, melynek hatásvonala a rúd tengelye, iránya balra mutat (156/a ábra).

Az igénybevétel húzás.

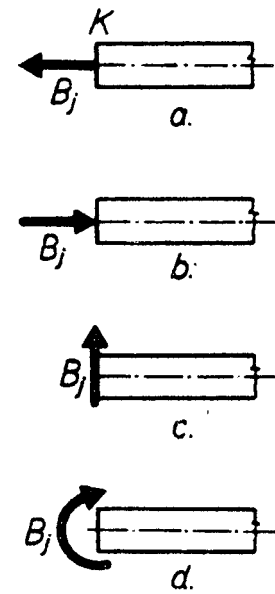
- A (B_j) erőrendszer eredője egyetlen erő, melynek hatásvonala a rúd tengelye, az erdő nyila jobbra mutat (156/b ábra).

Az igénybevétel nyomás. A húzó- és nyomó igénybevételt közös néven normál igénybevételnek s a rúdirányú erőt, normálerőnek is nevezik.

- A (B_j) erőrendszer eredője egyetlen erő, melynek

Hatásvonala áthalad a szelvény súlypontján (156/c ábra).

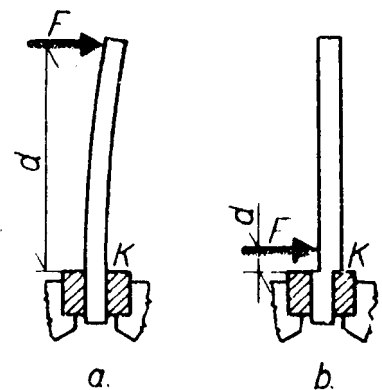
Az igénybevétel nyírás, az eredő a nyíróerő.



156. ábra

Ennek az igénybevételfajtának érzékelése végett gondoljuk el, hogy a 157/a ábrán látható, satuba fogott fémrúd (nem merev test!) egyre jobban meggörbül, az F hatására, ha d növekszik. Ha d csökken, akkor elegendően nagy F esetén a rúdnak a K szelvény által elválasztott két része egymáshoz képest eltolódhat a szelvény síkja mentén.

A deformálódás ez utóbbi esetét nevezzük elnyíródásnak. Ezzel találkozunk az ollóval való nyírás során is.



157. ábra

- A (B_j) erőrendszer eredője erőpár, melynek nyomatékvektora a rúd tengelyére Merőleges (156/d ábra).

Az igénybevétel hajlítás, az erőpár nyomatéka a hajlító nyomaték.

Egy szelvényben egyidejűleg többfajta igénybevétel is ébredhet. Az igénybevételeket a velük egyenértékű bal oldali erőrendszer ismeretében határozzuk meg, általános esetben a következő módon (158. ábra): legyen a bal oldali erőrendszer i -edik erője F_i . Redukáljuk ezt az erőt a K szelvény S súlypontjára.

Ilyen módon egy S támaszpontú F_i erőt és egy erőpárt kapunk.

(158/b, c ábra).

Ha még a súlypontban ható F_i erőt felbontjuk N_i és T_i összetevőkre, akkor a K szelvény igénybevételét alap igénybevételek együtteseként állítjuk elő.

Ilyenkor, midőn a szelvényt különböző jellegű alap igénybevételek terhelik, összetett igénybevételről beszélünk.

Ha most a bal oldali erőrendszer többi erőjével hasonlóan járunk el, megkapjuk az $M_{h_1}, M_{h_2}, M_{h_n}$ hajlító erőpárokat, a $T_1, T_2 \dots T_n$ nyíróerőket, $N_1, N_2, \dots N_n$ normálerőket.

A keresztmetszet igénybevételeit az azonos nemű részigénybevételek összegezésével kapjuk.

IGÉNYBEVÉTELI FÜGGVÉNYEK

A tartó mechanikájának ismeretéhez szükséges, hogy ne csak egyik-másik helyen, hanem a tartó minden szelvényében áttekintésünk legyen az igénybevételekről. Vagyis végtelen sok helyen kell ismerni az M_h, T, N adatokat. Erre a következő út kínálkozik:

A rúd egyik végéhez olyan koordináta-rendszert illesztünk, melynek x tengelye a tartó tengelyével esik egybe, s melynek pozitív iránya lesz a „jobb” irány (159. ábra).

Vízszintes helyzetű rúd esetén az y tengely lefelé mutat, a z tengely irányát az határozza meg, hogy a koordináta-rendszer jobbrendszer. E koordináta-rendszerben az igénybevételeket három függvénnyel jellemezzük, az $M_h(x), T(x), N(x)$ igénybevételi függvényekkel melyek a tetszőleges x koordinátájú K szelvényt terhelő hajlító nyomatékot, nyíróerőt, normálerőt adják.

E helyen tisztázzuk, az előjelek kérdését.

A normálerőt akkor tekintjük pozitívnak,

ha $(B_j)/ill.(F_b)/$ erdőjének x - tengellyel párhuzamos összetevőjére balra mutat (156/a ábra). Másképp: - x irányú.

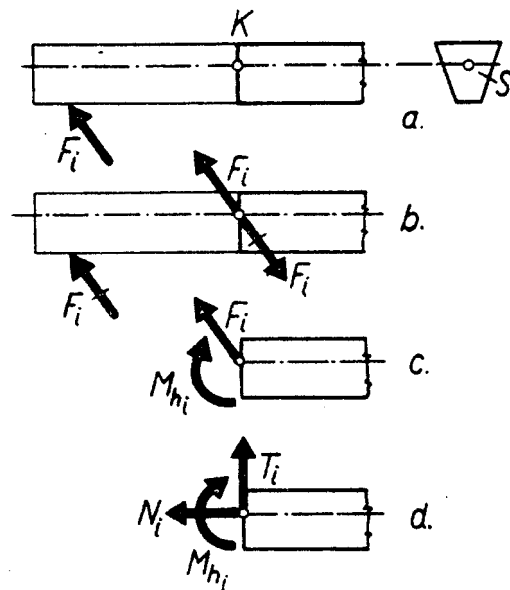
A nyíróerőt akkor tekintjük pozitívnak, ha $(B_j)/ill.(F_b)/$ eredőjének y - tengellyel párhuzamos összetevője a jobb oldali tartórészben felvett pontra vonatkoztatva pozitív forgásmódot szab meg (156/c ábra). Másképp: - y irányú.

A hajlító nyomatékot akkor tekintjük pozitívnak, ha $(B_j)/ill.(F_b)/$ koordináta - rendszerünkben K súlypontjára vonatkoztatva pozitív forgásmódot szab meg (156/d ábra). Másképp: az óramutató járásával egyezően „forgat”.

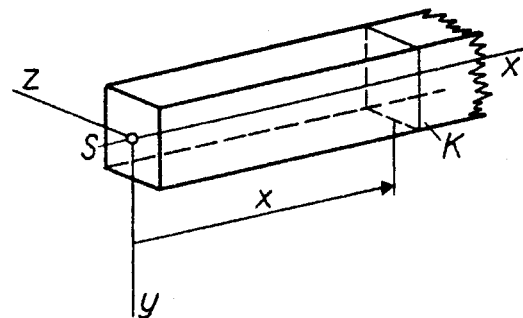
Feltéve, hogy az x hosszúságú bal oldali tartódarab terhelése koncentrált erőkből $(F_1, F_2, \dots)$, koncentrált erőpárokból $(M_1, M_2, \dots)$ és – esetleg x függvényében változó – $f(x)$ intenzitású megoszló erőkből áll, az igénybevételi függvények a következők:

$$M_h(x) = \sum M_i - \sum (x - x_i) F_i - \int_0^x (x - \xi) f(\xi) d\xi,$$

$$T(x) = -\sum F_{iy} - \int_0^x f(\xi) d\xi,$$



158. ábra



159. ábra

$$N(x) = -\sum F_{i_x}.$$

Az $M_h(x)$ és $T(x)$ függvényben ξ a szelvény koordinátája, mely 0-tól egy rögzített x-ig változhat.

Az F_i erők az összes koncentrált külső erőt jelentik, ide számítva a reakcióerőket is.

A $T(x)$ függvénnyel kapcsolatban még tisztázásra vár az az eset, mikor a vizsgált szelvényben koncentrált erő hat. Ezzel a következő tárgypont foglalkozik.

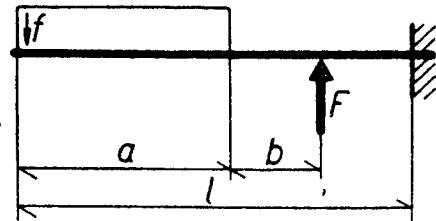
MEGJEGYZÉS

Az $M_h(x)$ és $T(x)$ függvényekben szereplő integrálok formális kiszámítására gyakorlatilag alig van szükség, mert a megoszló terhelés rendszerint egyenletes, s ilyenkor az eredő, s annak nyomatéka könnyen meghatározható.

Az igénybevétel - definíciók ismerete önmagában még nem elegendő. Számos feladat önálló kidolgozása során alakul ki az az érzés, mely az igénybevételek gyors és helyes megítélését, számítani tudását biztosítja.

14. Példa

Írjuk fel a 160. ábrán látható, egyik végén befogott ún. konzoltartó igénybevételi függvényeit.



$$M_h(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}fx & \text{ha } 0 \leq x \leq a \\ -\left(x - \frac{a}{2}\right)af & \text{ha } a < x \leq a+b \\ -\left(x - \frac{a}{2}\right)af + [x - (a+b)]F & \text{ha } a+b < x \leq l \end{cases}$$

Az adott numerikus értékekkel:

Adatok: $l = 1,3 \text{ m}$
 $a = 0,7 \text{ m}$
 $b = 0,3 \text{ m}$
 $f = 200 \text{ N/m}$
 $F = 230 \text{ N}$

$$M_h(x) = \begin{cases} -100x^2 \text{ mN}, & \text{ha } 0 \leq x \leq 0,7 \text{ m} \\ -140x + 49 \text{ mN}, & \text{ha } 0,7 \text{ m} < x \leq 1,0 \text{ m} \\ 90x - 181 \text{ mN}, & \text{ha } 1,0 \text{ m} < x \leq 1,3 \text{ m} \end{cases}$$

$$T(x) = \begin{cases} -xf & \text{ha } 0 \leq x \leq a \\ -af & \text{ha } a \leq x < a+b \\ -af + F & \text{ha } a+b < x \leq l \end{cases}$$

Numerikusan:

$$T(x) = \begin{cases} -200xN, & \text{ha } 0m \leq x \leq 0,7m \\ -140N, & \text{ha } 0,7m \leq x < 1,0m \\ 90N, & \text{ha } 1,0m < x \leq 1,3m \end{cases}$$

II.7 Igénybevételi ábrák

ÁBRÁZOLÁSI SZABÁLYOK

Az igénybevételeket leíró $M_h(x)$, $T(x)$, $N(x)$ függvények grafikonjai az igénybevételi ábrák.

Beszélhetünk tehát nyomaték-, nyíróerő-, és normálerő ábráról.

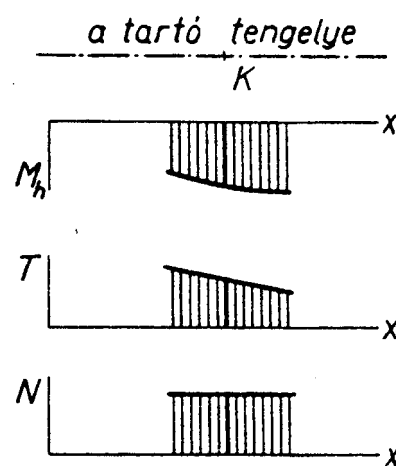
Az igénybevételi ábrákat a szóban forgó rúddal párhuzamos tengelyű koordináta-rendszerekben ábrázoljuk, mégpedig úgy, hogy a rúd bármely szelvényében fellépő igénybevételt a szelvény „alatti” grafikonpont ordinátája, metszéke ábrázolja (161. ábra).

Az ábrázolás módjára vonatkozólag nem alakult ki egységes felfogás. Ebben a jegyzetben a következő előjelszabályokat tartjuk be:

$$\frac{-M + T + N}{+M - T - N}$$

Vagyis a hajlító nyomaték kivételével az igénybevételi ábra tengelye „felett” ábrázoljuk a pozitív igénybevételt, alatta a negatívot.

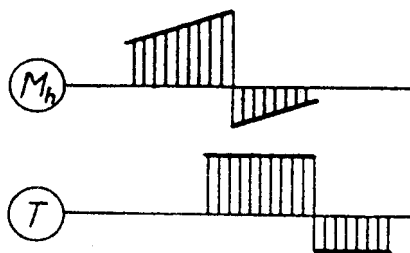
Megjegyezzük, hogy az igénybevételi ábrák szerkesztésénél csupán a rúd tengelyével párhuzamos tengelyvonalat rajzoljuk meg, és feltüntetjük az igénybevétel fajtáját. A grafikon ábrázolása az igénybevételi függvény ismeretében számított értékek alapján történhet, alkalmas lépték felvételével, de történhet – a később ismertetésre kerülő – szerkesztéssel is.



161. ábra

KÜLÖNLEGES PONTOK

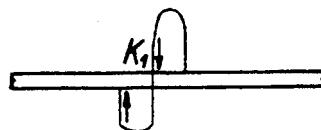
Előfordulhat, hogy az igénybevételi függvény nem folytonos, grafikonja szakadásos. Ilyen – nem összetartozó – ábrarészleteket szemléltet a 162. ábra. Kérdés, hogyan értelmezzük az igénybevételeket ilyen helyeken.



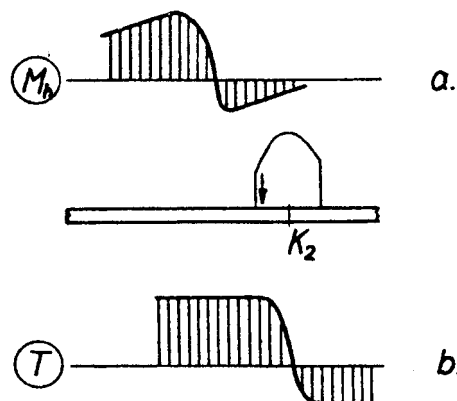
162. ábra

A helyes válaszhoz vegyük figyelembe a fizikai valóságot! A nyomatékábrában jelentkező „ugrás” koncentrált erőpár jelenlétére, a nyíróerő ábránál koncentrált erő jelenlétére utal. Azonban a koncentrált erőpár és a koncentrált erő egyaránt absztrakció, mely a valóság egyszerűsített leírását célozza. Ténylegesen a viszonyokat a 163. ábra mutatja.

A K_1 szelvényben ható koncentrált erőpár valójában két rövid szakaszon megoszló ellentétes irányú megoszló erőrendszer, melynek nyíróerő ábrája körül – belül olyan a valóságban, amint a 163/b ábra mutatja.



Amint látjuk a valóságos grafikonok némileg eltérnek az idealizált igénybevételi ábráktól. A kérdéses hely kis környezetén belül az igénybevételek a zérus értéket is felveszik – legalábbis példánkban. Zérus igénybevételt megadni mégis félrevezető lenne, hiszen a kérdéses szelvényhez nagyon közel az igénybevétel jelentékeny. A helyes eljárás az, hogy az igénybevételi függvény bal (ill. jobb) oldali határértékét adjuk meg a kérdéses helyen, tehát például a 167. ábrán az $x = 1$ m-nél $T^-(x) = -140\text{N}$, $T^+(x) = 90\text{N}$.

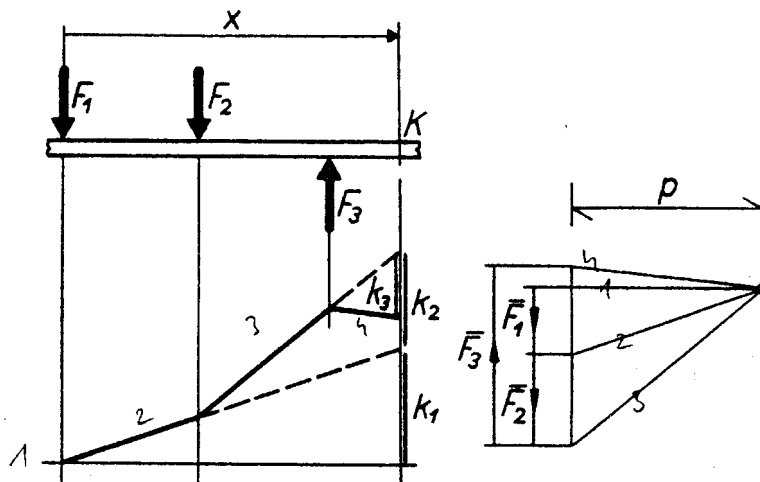


Adott műszaki feladat megoldásánál a két igénybevétel közül a kedvezőtlenekkel kell számolni.

GRAFIKUS MÓDSZER

Az igénybevételi ábrákat szerkesztéssel is előállíthatjuk. Evégből nem kell mást tennünk, mint az I.6 és I.15 tárgypontokban látott grafikus eljárással olyan ábrát készíteni, mely a bal oldali erőrendszer nyomatékát szolgáltatja minden szóba jövő tartószelvényben.

A módszer megértése végett tanulmányozzuk át újra a nyomték grafikus meghatározásáról tanultakat. Ha ez megtörtént, nézzük hogyan alakul a 164. ábrán látható, koncentrált erővel terhelt rúdszakasz nyomtékábrája. A szerkesztés menetének részletes ismertetését megemlítjük, hogy a vektorokat a könnyebb azonosítás végett rajzoltuk egymáshoz képest eltolva.



164. ábra

Megmutatjuk, hogy az ábrán, vastagon rajzolt törött vonal az $M_h(x)$ függvény grafikonja. Ez így látható be: ha az x koordinátájú K szelvénytől balra csak F_1 működne, akkor a korábbiak értelmében $M_h(x) = -k_1 p$ lenne.

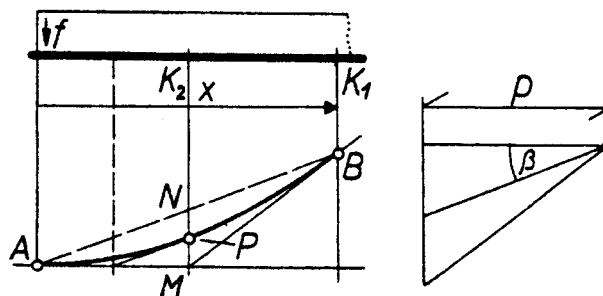
F_2 azonban növeli a nyomatékokat.* Egyedül F_2 -ből a $-k_2 p$ hajlító nyomaték származna, F_1 és F_2 erőkből együttesen: $-(k_1 + k_2)p$. Hasonlóan látható be, hogy az $F_b \equiv (F_1, F_2, F_3)$ bal oldali erőrendszerből végeredményben $M_h(x) = -(k_1 + k_2 - k_3)p$. A fenti gondolatmenethez hasonló érvényes x tetszőleges értékére.

Ha egy rúdszakaszt megoszló erőrendszer terhel, akkor a nyomatékábra egyes pontjait megrajzolhatnánk úgy, ahogy a 88. ábrán láttuk. A pontonkénti szerkesztés helyett azonban elegendő a grafikon néhány jellegzetes pontjának meghatározása, lehetőleg az érintővel együtt. Parabola pontok beiktatásához és érintőjük szerkesztéséhez hasznos a következő észrevétel: ha a 165. ábra (az ábra nagy része lényegében azonos a 88. ábrával, ezért szerkesztését nem részletezzük) $\frac{x}{2}$ koordinátájú K_2 szelvényéhez tartozó grafikonpontot meg

akarjuk szerkeszteni, akkor hasonlóan járhatunk el, mint K_1 szelvény esetén. A kívánt pont P .

A korábban elmondottak alapján belátható, hogy a P -beli érintő β hajlásszögű. Ez egyben azt is jelenti, hogy az érintő az AB parabolahúrral párhuzamos.

Összefoglalva eredményünket: az A, B -beli érintők M metszéspontjából a parabolatengellyel húzott párhuzamos az AB parabolahúrt egy N pontban metszi.



*Helyesebben: abszolút értékét

165. ábra

Ekkor P az MN szakasz felezőpontja és a P-beli érintő AB -vel párhuzamos. A 166. ábra azt szemlélteti, hogy a tárgyalt tulajdonság tetszőleges két parabolaérintővel kapcsolatban is érvényes. Ugyancsak feltünteti a 166. ábra egy további Q pontnak és érintőjének meghatározását.

15. Példa

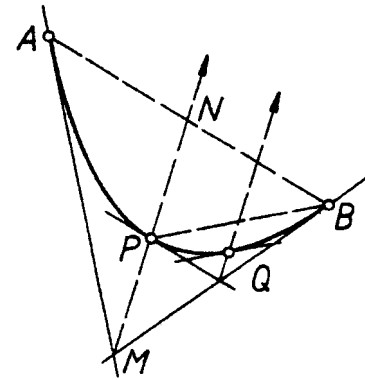
Állítsuk elő szerkesztéssel a 16. Példában szereplő tartó igénybevételi ábráit (167. ábra)!

A megoldás lépései a következők:

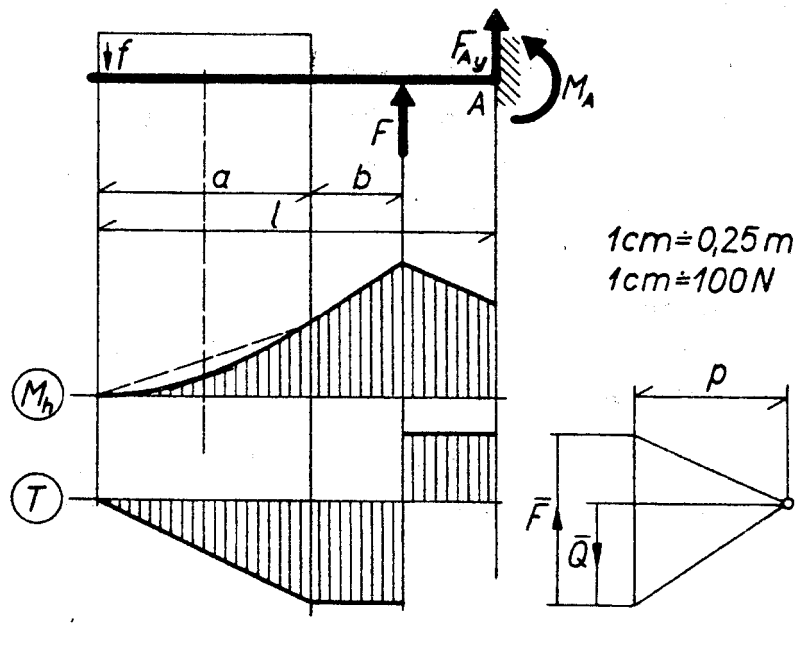
Alkalmas léptékek választása után egymáshoz fűzzük a terhelő erőrendszer vektorait (a megoszló erőrendszer $Q = a \cdot f$ eredőjének és F -nek a vektorát).

Póluspontot veszünk fel, mégpedig úgy, hogy a nyomatékábra tengelyvonala vízszintes, a pólustávolság kerek érték, s az ábra tetszetős legyen. Megszerkesztjük a terhelő erőrendszer kötélsokszögét. A megoszló terhelés alatt parabolaívet szerkesztünk. A nyíróerő ábra metszékeit a vektorábráról mérhetjük, illetve vetíthetjük ki.

Bár az igénybevételi ábrák megszerkesztéséhez nem szükséges, állapítsuk meg a reakciókat is.



166. ábra



167. ábra

A II.1. – ben mondottak értelmében a reakció – erőrendszert a tartó tengelyének és a fal síkjának a dőléspontjára redukáljuk.

A reakció – erőrendszer számítása a következő:

$$\rightarrow F_{Ax} = 0.$$

$$\uparrow -af + F + F_{Ay} = 0,$$

$$F_{Ay} = -90N.$$

$$\curvearrowright_A af\left(l - \frac{a}{2}\right) - (l - a - b)F + M_A = 0,$$

$$M_A = -64mN.$$

A számítás szerint F_{Ay} és M_A nyíla az ábrán jelölttel ellentétes.

Ellenőrizzük $M_{Ay} - t$ szerkesztéssel is! Az A pont szelvényében

$$M_A = Y_A \cdot p = -1,27 \cdot 0,25m \cdot 2 \cdot 100N, \quad M_A = -63,5mN.$$

Megemlítjük, hogy az egyensúlyi egyenleteket a szokásos módon – tehát nem a tartóhoz kötött – koordináta-rendszerben írtuk fel.

II.8. Kapcsolat a hajlító nyomaték, a nyíróerő és a terhelés között

FÜGGVÉNYEK SZÉLSŐ ÉRTÉKEI

A tartók célszerű méreteinek meghatározásához, vagy adott tartó méretei ellenőrzéséhez egyaránt ismerni kell a tartót terhelő igénybevételek szélső értékeit, továbbá azokat a szelvényeket is amelyekben e veszélyes igénybevételek fellépnek.

Mivel lényegében függvények – az $M_h(x), T(x)$ függvények – szélső értékeinek felkereséséről lesz szó, emlékeztetünk a matematika egy idevágó tételére.

Tétel: valamely pontban egy (differenciálható) függvény szélső értékének elégséges feltétele, hogy ott az első differenciáhányados zérus legyen és előjelet váltson. Ha az első derivált egy pontban nulla és pozitívból negatívba megy át, a függvénynek maximuma van, ha negatívból megy át pozitívba, a függvénynek minimuma van.

KAPCSOLAT M_h , T és f KÖZÖTT

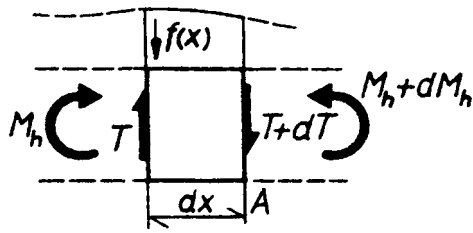
Tétel: ha egy rúdszakasz $M_h(x)$ függvénye valamely x helyen deriválható, akkor

$$\frac{dM_h(x)}{dx} = T(x).$$

Vagyis: a hajlító nyomatéknak a koordináta szerinti deriváltja egyenlő a nyíróerővel.

Bizonyítás. Feltesszük, hogy a rúdszakasz terhelése a rúdtengelyre merőleges irányú megoszló erőrendszer. A 168. ábra szemlélteti a rúdnak az x és $x+dx$ koordinátájú szelvények által határolt darabját a rá ható erőkkel együtt.

A tartódarab egyensúlyából:



168. ábra

$$dM_h - dxT + \frac{dx}{2} f dx = 0.$$

A bal oldal harmadik tagját – mint másodrendűen kicsiny mennyiséget – elhanyagolva

$$\frac{dM_h}{dx} = T.$$

A tétel érvényességét nem érinti esetleges tengelyirányú erők jelenléte. Ugyancsak érvényben marad a tétel, ha a vizsgált helyen a tartó terheletlen.

Koncentrált erő vagy erőpár esetén a tétel nem érvényes, hiszen $M_h(x)$ ekkor nem differenciálható azon a helyen, ahol a koncentrált erő, illetve erőpár hat.

Tétel: ha egy megoszló erőrendszerrel terhelt rúdszakasz $T(x)$ függvénye valamely x helyen deriválható, a megoszló teher intenzitása $f(x)$

$$\frac{dT(x)}{dx} = -f(x).$$

Vagyis: A nyíróerőnek a koordináta szerinti deriváltja egyenlő a negatív előjellel vett fajlagos terheléssel. Az előző tétel értelmében nyilván így is felírható a tétel:

$$\frac{d^2 M_h(x)}{dx^2} = -f(x).$$

Bizonyítás. A 168. ábra, illetőleg a tartódarab egyensúlyából

$$T - f(x)dx - (T + dT) = 0,$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = -f(x).$$

MEGJEGYZÉS

A fenti két tétel mélyebb megértése céljából tanulságos összevetni a 14. Példában felírt $M_h(x), T(x)$ függvényeket. Meggyőződhetünk arról, hogy az utóbbiakat az M_h - függvényekből deriválással is kaphattuk volna.

Azt is ellenőrizhetjük, hogy a $T(x)$ függvény deriváltja az a hosszúságú tartódarab alatt $-f$.

A MAXIMÁLIS NYOMATÉK MEGHATÁROZÁSA

A tartók méretezése szempontjából lényeges adat a tartót terhelő legnagyobb, vagy esetleg legkisebb, de abszolút értékét tekintve legnagyobb $|M|_{\max}$ maximális hajlító nyomaték. Ennek helyét az ún. veszélyes szelvényt a következő megfontolással állapíthatjuk meg.

Mivel egy deriválható függvény szélső értékeit a vonatkozó tétel szerint olyan helyen kell keresni ahol a derivált zérus, s mivel a hajlító nyomaték deriváltja a nyíróerő, következik, hogy a veszélyes szelvényt ott kell keresnünk, ahol a nyíróerő zérus.

Igaz ugyan, hogy különleges helyek is előfordulnak, ahol az $M_h(x)$ nem deriválható, de ha figyelembe vesszük az idealizált és valóságos igénybevételi ábrákról az előző tárgypontban (KÜLÖNLEGES PONTOK) mondottakat, akkor belátható, hogy minden esetben ott van a hajlító nyomatéknak (esetleg relatív) szélső értéke, ahol a nyíróerő előjelet vált. Az olvasóra bízunk annak belátását, hogy egy „koncentrált” erőpárral terhelttartó esetén is a valóságban előjelet vált a nyíróerő. Nézzük most egy konkrét esetben a veszélyes szelvény és a maximális nyomaték meghatározását.

Tekintsük a 169. ábrán látható kéttámaszú tartót.

Az adatok a következők: $a = 3 \text{ m}$, $b = 5 \text{ m}$, $c = 2 \text{ m}$, $f = 100 \text{ N/m}$, $F = 400 \text{ N}$, $M = 150 \text{ N}$.

Meghatározzuk az F_A reakcióerőt. $Q = (a + b) f$ jelöléssel

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{B} \\ \curvearrowleft \end{array} \quad -(a+b)F_A - M - bF + \frac{a+b}{2}Q = 0, \quad F_A = 131,25 \text{ N}.$$

$$\uparrow F_A + F + F_B - Q = 0, \quad F_B = 268,75 \text{ N}.$$

A lehetséges veszélyes szelvényeket ott keressük, ahol a nyíróerő zérus:

$$F_A - x_1 f = 0, \quad x_1 = 1,31 \text{ m}.$$

A következő lehetséges hely az F erő szelvénye:

$$x_2 = 3,00 \text{ m}.$$

A b hosszúságú tartódarabon két szelvényt kell megvizsgálni:

$$F_A + F - x_3 f = 0, \quad x_3 = 5,31 \text{ m}.$$

A másik lehetséges hely M szelvénye: $x_4 = 6,00 \text{ m}.$

Ezek a helyeken a hajlító nyomaték rendre a következő:

$$M_1 = x_1 F_A - x_1 f \frac{x_1}{2}, \quad M_1 = 86,14 \text{ mN}.$$

$$M_2 = aF_A - \frac{a}{2}af = aF_A - \frac{a}{2}Q_1, \quad M_2 = -56,25 \text{ mN}.$$

$$M_3 = x_3 \left[F_A - \frac{x_3}{2} f \right] + (x_3 - a)F,$$

$$M_3 = 211,13 \text{ mN}.$$

$$M_4 = cF_B - c \frac{f^2}{2},$$

$$\underline{M_4 = 337,50 \text{ mN}.$$

M_4 – et jobbról számítottuk!

A veszélyes szelvény tehát az x_4 szelvényű, s a maximális nyomaték M_4 .

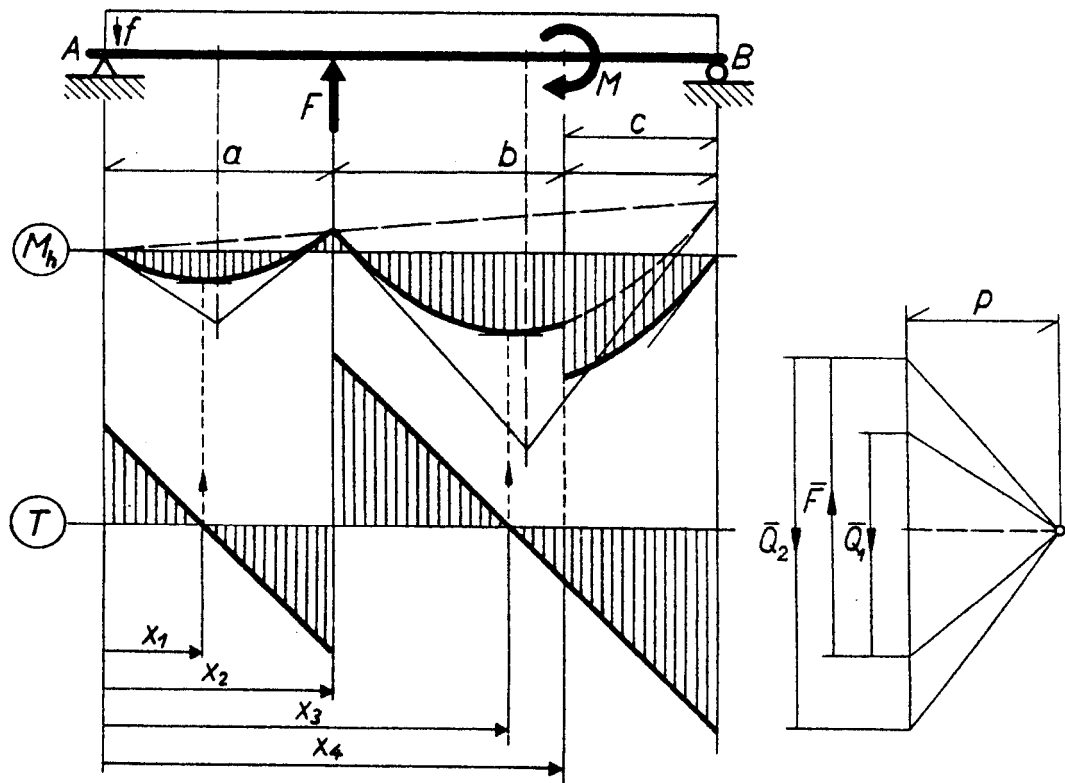
A szerkesztő megoldás eredményei:

$$x_1 = 1,3 \text{ m}, \quad x_2 = 3,1 \text{ m}, \quad x_3 = 5,3 \text{ m}, \quad x_4 = 6,0 \text{ m}.$$

$$M_1 = 80 \text{ mN}, \quad M_2 = -58 \text{ mN}, \quad M_3 = 212 \text{ mN}, \quad M_4 = 330 \text{ mN}.$$

A szerkesztés lépéseit nem részletezzük. Megvilágítást igényelne, hogy miképpen lehet elérni az M_h - ábra tengelyvonalának vízszinteségét, de ez az M_h - ábrának nem lényeges kelléke, így csupán az irodalomra utalunk. A koncentrált erőpár szelvényében az M_h - ábra ugrása $\frac{M}{p}$ nagyságú.

Említést érdemel még, hogy a megoszló erőrendszert olyan $Q_1 = af, Q_2 = bf$ eredőjű részekre osztottuk, melyeken belül koncentrált erő nem hat.



169. ábra

IGÉNYBEVÉTELI ÁBRÁK VÁZOLÁSA

Az igénybevételi ábrák előállítása a kezdő számára rendszerint nehézséget okoz. Kellő számú feladat önálló kidolgozása során azonban kialakul az az érzék, melynek birtokában számító vagy szerkesztő munka nélkül is képes az igénybevételek minden lényeges jellegzetességét tükröző vázlatokat készíteni. A tudatos vázolást megkönnyítheti néhány – az eddigiek alapján belátható – szabály.

Általános szabályok:

Terheletlen pontokban a T – ábra érintője vízszintes.

Terheletlen szakaszon az M_h – ábrát egyenes határolja.

M_h szélső értéke ott keresendő, ahol T zérus.

Koncentrált teherre vonatkozó szabályok:

Koncentrált erő alatt a T – ábrában ugrás van.

Koncentrált erő alatt az M_h – ábrában törés van.

Egyenletesen megoszló teherre vonatkozó szabályok:

Egyenletesen megoszló teher alatt a T – ábrát ferde szakasz határolja.

Egyenletesen megoszló teher alatt az M_h – ábrát másodfokú parabola határolja.

Koncentrált erőpárra vonatkozó szabály:

Koncentrált erőpár alatt az M_h – ábrán ugrás van.

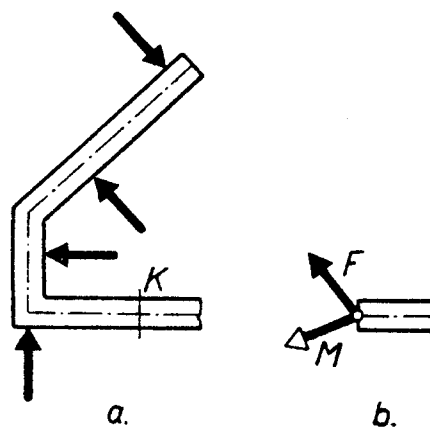
II.9. Törttengelyű és ágas tartók

IGÉNYBEVÉTEL

Általánosítjuk az igénybevételekre tanultakat és értelmezzük tört-, görbetengelyű és ágas tartók igénybevételeit is. Keressük például egy törttengelyű rúd K szelvényének igénybevételét.

Hasonlóan járhatunk el, mint korábban. A bal oldali rúdrészre ható erőrendszert* redukáljuk a K szelvény súlypontjára (170. ábra). E redukálás eredménye általános esetben egy erő és egy nyomatékvektor.

A 171. ábrán azt szemléltetjük, hogy ez a két vektor további, a szelvény síkjára merőleges és a szelvény síkjába eső összetevőkre bontható. (F felbontását a 171/a, M felbontását a 171/b ábra mutatja.)



170. ábra

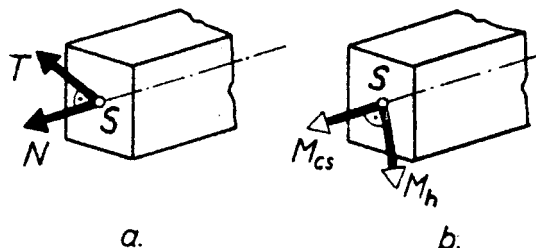
Az összetevők a következők:

N : normálerő,

T : nyíróerő,

M_{cs} : csavaró nyomaték,

M_h : hajlító nyomaték,



171. ábra

Az igénybevételek számszerű (ill. függvénnyel történő) leírása a fenti vektorok komponenseivel történhet.

- Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a „bal oldali” erőrendszer itt már gyakran nem csupán a szelvénytől balra eső erőkből áll. A „bal oldali tartódarabra ható erők” kijelentés rövidítésére szolgál a „bal oldali erőrendszer” kifejezés.

IGÉNYBEVÉTELI ÁBRÁK

Törtengelyű tartók igénybevételi ábráinak szerkesztésére az alábbi utat fogjuk használni: az igénybevételeket jelentő metszéseket a tartó tengelyvonalára merőlegesen mérjük fel. Görbetengelyű tartóknál a felmérés a normálison történik.

Az igénybevételi ábrák részei fedhetik egymást, az ábrák sraffozásával biztosíthatjuk az egyértelműséget. Az igénybevételi ábrák közt fennálló összefüggések csak a tartók egyenes szakaszaira érvényesek, a sarokpontokban nem.

Az elmondottakat egy feladattal illusztráljuk. Állítsuk elő a 128. ábrán látható fékkar igénybevételi ábráit!

A fékkarra ható erők közül hiányzik még az A pontban ható. Ennek komponensei egyszerű számítás szerint:

$$A_x = -\mu_0 N \quad \text{és} \quad A_y = F - N.$$

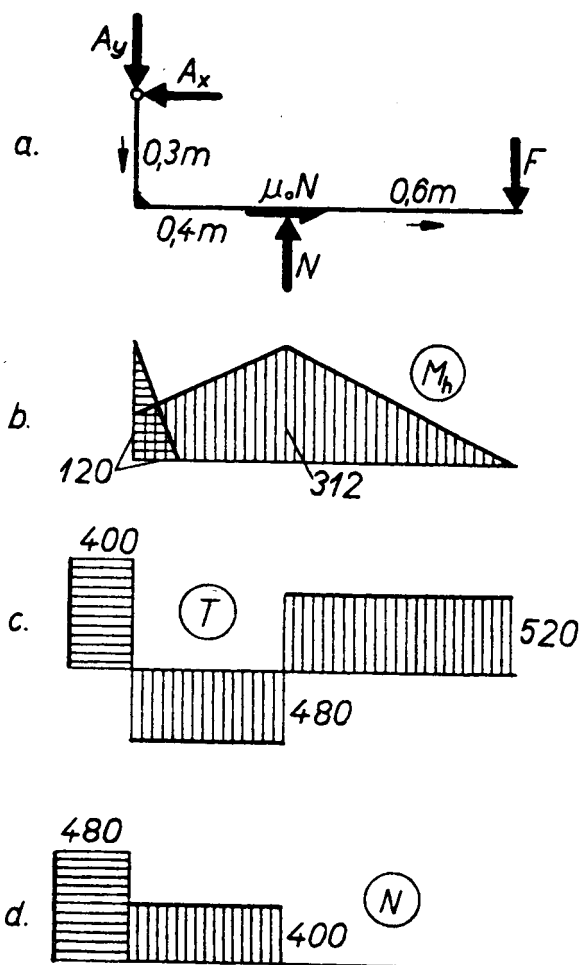
Vegyük a következő számadatokat:

$a = 0,3 \text{ m}$, $b = 0,4 \text{ m}$, $c = 1,0 \text{ m}$, $\mu_0 = 0,4$,

$R = 0,3 \text{ m}$, $M = 120 \text{ mN}$.

Ekkor az adatok és az egypofás fékkel kapcsolatos számítások alapján meghatározható erőket 172/a ábra szemlélteti. Most már vázolhatjuk az igénybevételi ábrákat, melyek az eddigiek alapján magyarázatot nem igényelnek.

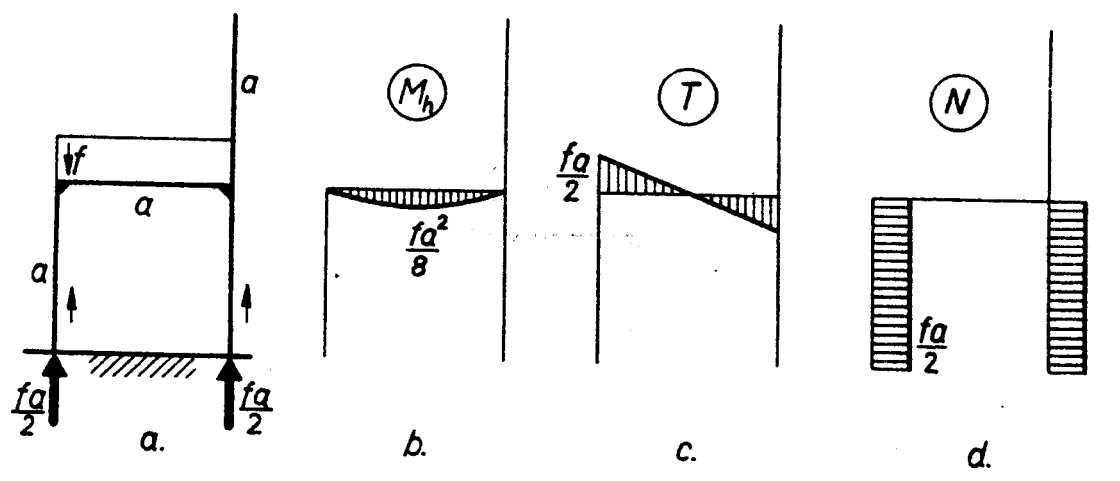
Az egyes jellemző metszésekhez kiírtuk az igénybevétel nagyságát.



172. ábra

ÁGAS TARTÓK

Ha a tartó tengelye egyes pontokban két- vagy több felé ágazik el, ágas tartóról beszélünk. Az igénybevételek értelmezésére és ábrázolására tanultak változatlanul érvényesek, a tartó bejárési módját (a haladási irányt) ajánlatos a tartó tengelye mentén néhány nyíllal jelölni. Példaképpen vizsgáljunk meg egy (kissé egyszerűsített) szék – mint ágas tartó – igénybevételeit, két jellegzetes terhelésmód esetén. Az első esetben (173/a ábra) az ülőfelület terhelése egyenletesen megoszló, a fajlagos terhelés f . Az igénybevételi ábrákon (173/b,c,d) feltüntettük az egyes igénybevételek maximális értékét.

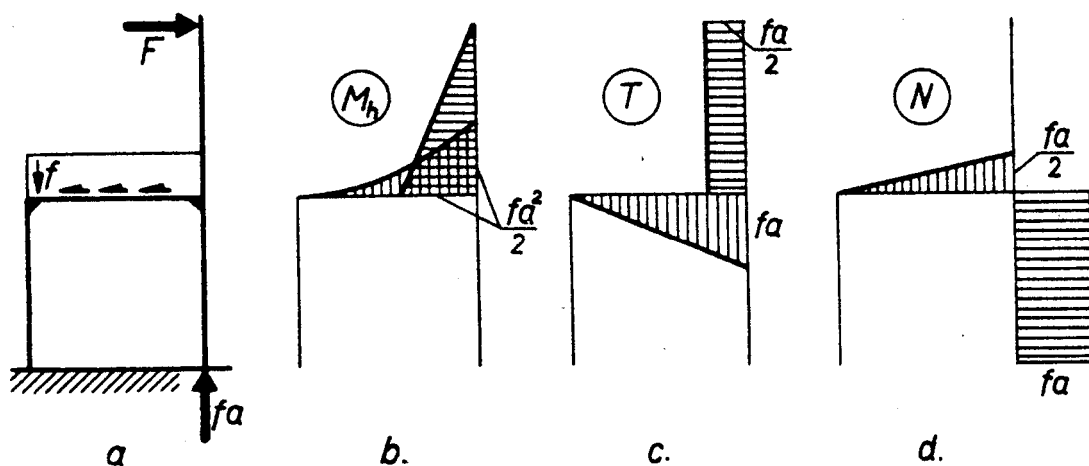


173. ábra

A második eset (174/a ábra) a „hátradőlés” során fellépő terhelést szemlélteti. A támla terhelését koncentrálnak tekintjük, az ülőfelület vízszintes terhelését megoszlnak, s feltesszük, hogy ennek eredője is F nagyságú. Feltesszük továbbá, hogy a szék a billenés határán van, tehát az egyik széklábra ható támasztóerő zérus. Ekkor a jobb oldali székláb végpontjára felírt nyomatékegyenlet:

$$\frac{a}{2} fa - aF = 0, \quad F = \frac{af}{2}.$$

A székre ható külső erők ismeretében az igénybevételi ábrák szerkeszthetők.



174. ábra

Az igénybevételi ábrák lényeges metszékeinek nagyságát ismét feltüntettük. Figyelemre méltó, hogy a szék második terhelési módja milyen igénybevétel – növekedéssel jár.